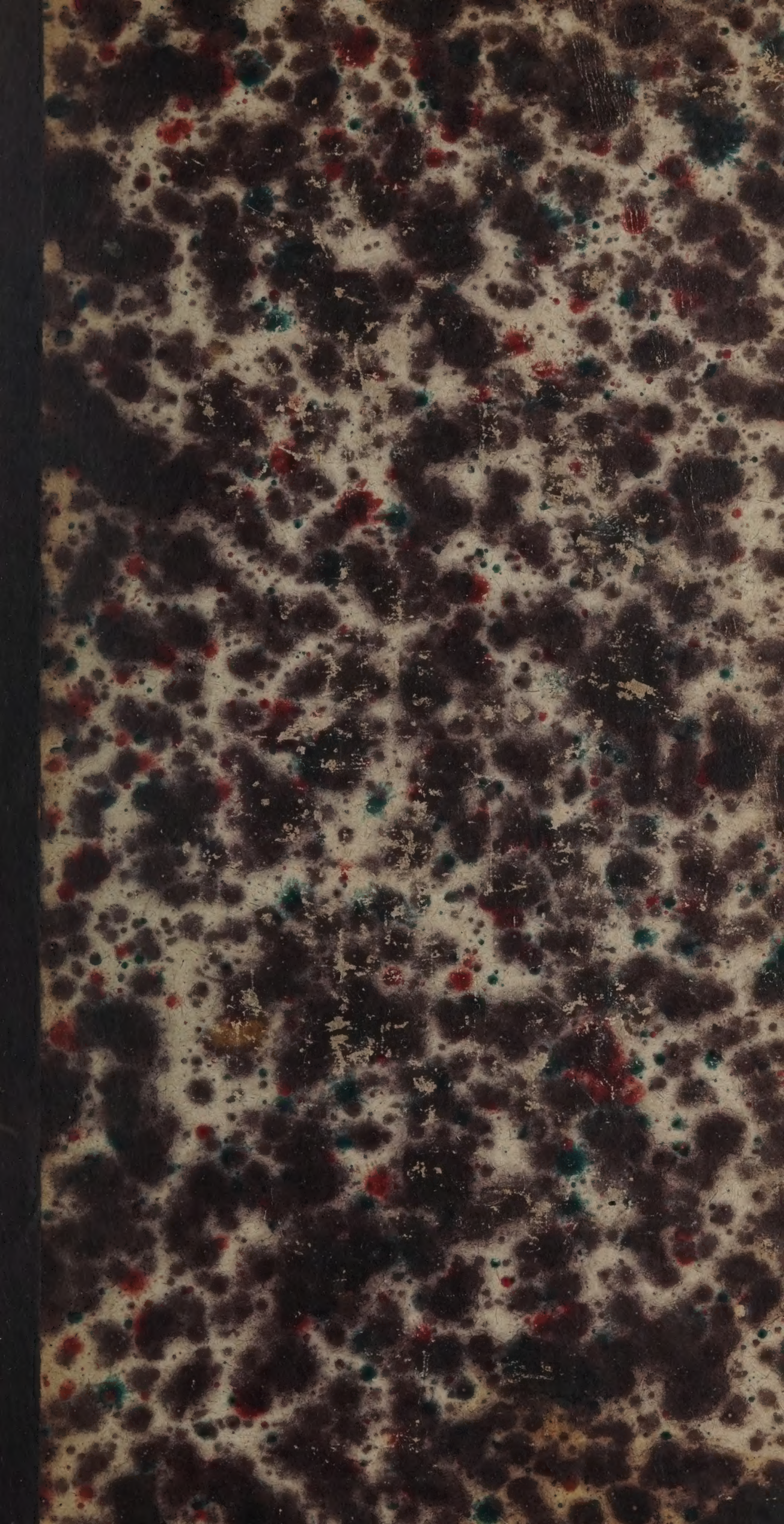
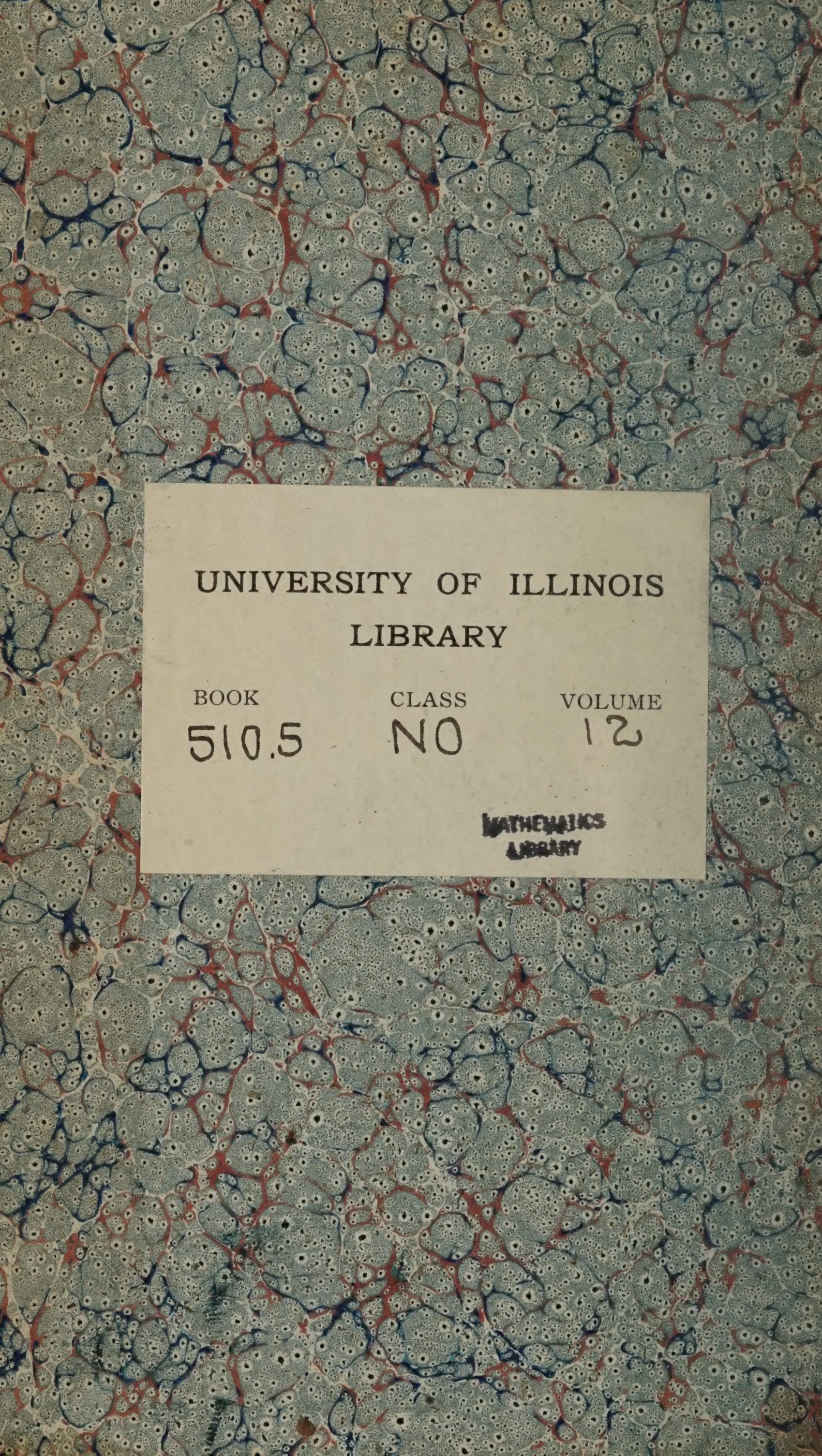
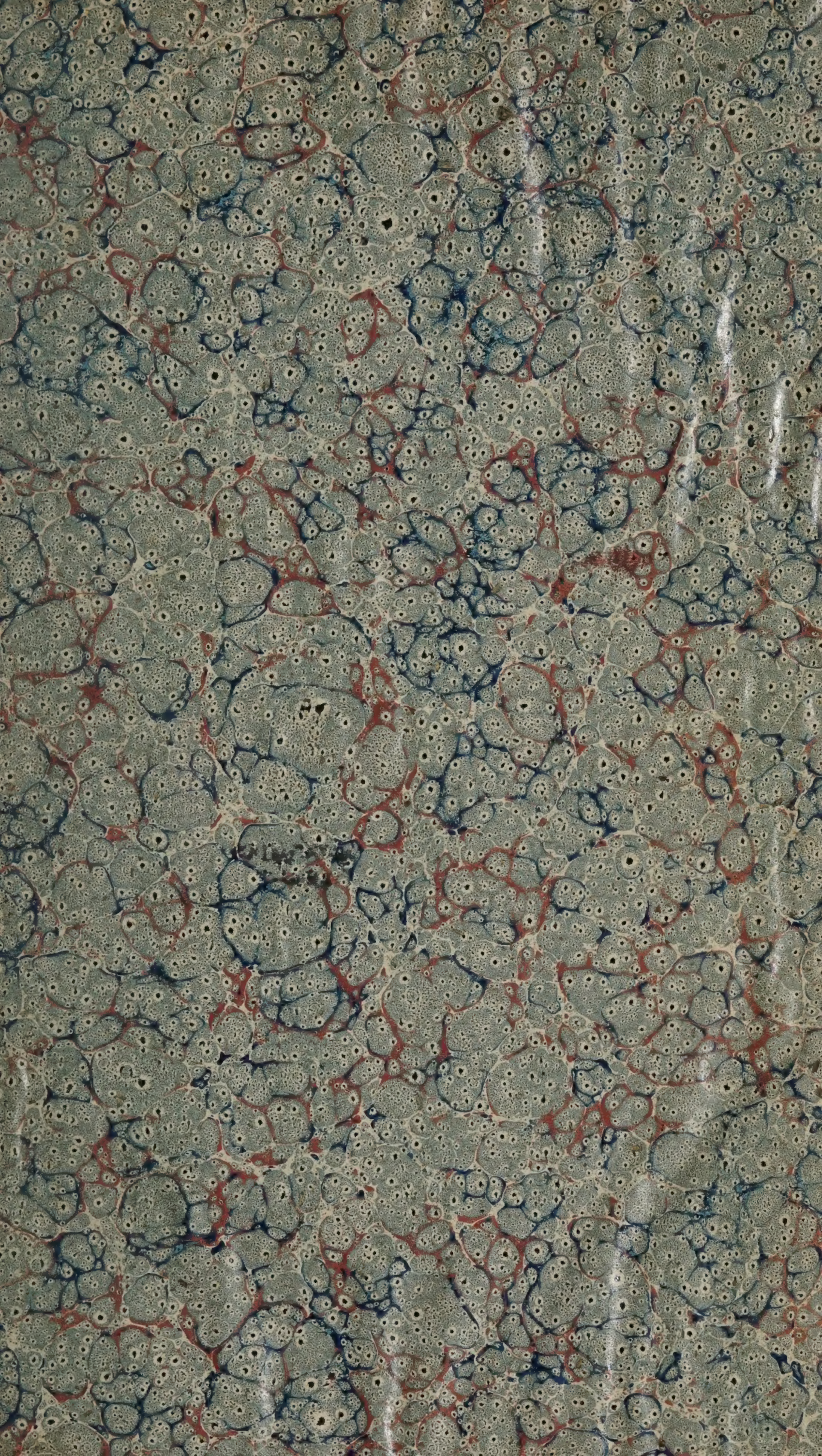




UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY
BOOK
510.5
CLASS
NO
VOLUME
12
MATHEMATICS
LIBRARY



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1853.

LIBRAIRIE DE BACHELIER.

Cet Ouvrage se trouve aussi

A ANGOULÊME..	chez	PEREZ-LECLER.
BORDEAUX...	—	CHAUMAS.
BOURGES.....	—	VERMEIL.
BREST........	—	Mme Vve LEFOURNIER.
LILLE........	—	VANACKÈRE.
LORIENT......	—	LEROUX-CASSART.
LYON........	—	SAVY.
	—	BRUN et Cie.
MARSEILLE...	—	Mme Vve CAMOIN.
METZ.........	—	WARION.
MONTPELLIER.	—	SÉWALLE.
NANCY........	—	G. GRIMBLOT et Cie.
NANTES......	—	FOREST aîné.
ORLÉANS.....	—	GATINEAU.
RENNES......	—	VERDIER.
ROCHEFORT...	—	A. GIRAUD.
	—	PROUST-BRANDAY.
ROUEN.......	—	LEBRUMENT.
STRASBOURG..	—	TREUTTEL et WURTZ.
	—	Mme LEVRAULT.
	—	DERIVAUX.
TOULON......	—	MONGE.
TOULOUSE....	—	Mlles GALLON sœurs.
	—	PRIVAT.
	—	GIMET.
LEIPSIG.....	—	MICHELSEN.
LONDRES....	—	BAILLIÈRE.
	—	DULAU et Cte, Soho-Square.
MADRID.....	—	MONIER.
TURIN......	—	BOCCA.
VIENNE.....	—	ROHRMANN

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME DOUZIÈME.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

—

1853.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

MÉMOIRE DE LÉONARD EULER SUR L'UTILITÉ DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES.

TRADUIT DU LATIN PAR M. ÉDOUARD LÉVY,
Répétiteur de mathématiques au lycée de Strasbourg.

Note du rédacteur.

Pour bien comprendre le but du Mémoire suivant, quelques renseignements historiques nous semblent nécessaires.

Frédéric II, que les Prussiens surnomment avec un juste orgueil Frédéric l'*Unique*, est le génie le plus vaste qui ait jamais occupé un trône. Forcé de combattre, avec des moyens assez bornés, la ligue des trois puissances continentales, il sortit victorieux de la lutte, à l'aide d'une tactique nouvelle, d'armes perfectionnées, et d'habiles combinaisons stratégiques, conserva ses conquêtes, agrandit son royaume, consolida son empire. Il enrichit la Prusse de fabriques, d'usines, de banques de crédit foncier; donna le premier exemple d'une législation codifiée, de certaines institutions libérales, et de la plus libérale de toutes, la *tolérance*. *Bezahlet was ihr sollt, und glaubet was ihr wollt : Payez ce que vous devez ;*

71379

croyez ce que vous voulez. Tel était son dicton favori, devenu la maxime de tout gouvernement juste et éclairé. Il admit dans les rangs de son armée le jeune d'Étallonde, coaccusé de l'infortuné chevalier de la Barre, et ouvrit un asile aux jésuites expulsés de France. Frédéric, au milieu des plus cruelles vicissitudes, chassé de sa capitale, harcelé de toutes parts, réduit au désespoir, ne cessa de s'intéresser *au progrès*, entretint des relations avec toutes les notabilités intellectuelles contemporaines, et, dans sa Correspondance avec Voltaire, se montra, pour la forme et le fond, à la hauteur d'un tel correspondant. Excellent historien des événements du temps, écrivain classique, versificateur abondant, sinon poëte, habile flûtiste, compositeur d'opéra, il estimait aussi les grands mathématiciens, et accueillait avec faveur Euler, d'Alembert, Lagrange. Toutefois, n'ayant appris que les éléments des sciences exactes, on lui avait inculqué, dans sa jeunesse, des idées fausses sur les branches élevées, et il croyait que les théories infinitésimales satisfaisaient plutôt à une curiosité de l'esprit qu'à un besoin de la raison. Lors de l'arrivée d'Euler à Berlin, en 1741, Jordan (*), président de l'Académie, engagea l'illustre géomètre à dissiper cette erreur du grand roi. C'est dans cette intention qu'Euler écrivit ce Mémoire en latin, langue familière à Frédéric. On ne sait s'il l'a lu.

La connaisance de l'existence de ce Mémoire ne date que de 1792. Merian, gendre de Jordan, en donna communication à l'Académie de Berlin, dont il était membre, ainsi qu'on le verra dans le Discours ci-joint. L'autographe est aujourd'hui dans la collection de M. Fried-

---

(*) Jordan (Charles-Étienne), d'une famille française protestante exilée, né à Berlin le 27 août 1700, et y est mort le 24 mai 1745; Frédéric lui fit cette épitaphe: *Ci-gît l'ami des muses et du roi.*

laender, et son fils G. Friedlaender a édité ce Mémoire à Berlin, en 1847; M. Crelle l'a inséré, la même année, dans son précieux Recueil.

Lorsque des hommes qui doivent une existence brillante *uniquement* à leur réputation scientifique, à la science qu'ils ont acquise à l'École Polytechnique; lorsque ces hommes, oublieux de leur origine, détruisent étourdiment, certes sans le vouloir, la réputation immense, universelle, que l'École doit *uniquement* à la culture des hautes mathématiques, appliquées autant que possible aux théories fondamentales de la physique, de la chimie et des services publics; lorsque l'erreur du grand Frédéric est proclamée par ces hommes comme un principe d'enseignement, nous croyons que la traduction fidèle du Mémoire d'Euler, que nous devons au talent et à l'obligeance d'un jeune professeur, ne manque pas d'à-propos.

DISCOURS LU EN FRANÇAIS A L'ACADÉMIE DE BERLIN, LE 15 SEPTEMBRE 1762;

Par MERIAN (*).

J'ai trouvé, dans les papiers délaissés par feu M. Jordan, père de ma femme, ce petit Mémoire du grand Euler, écrit de sa propre main, que je vais avoir l'honneur de vous lire.

Aussitôt qu'il frappa mes regards, je me rappelai parfaitement le but dans lequel il fut composé, comme j'en tenais le récit de la bouche même de M. Euler, et comme j'ai eu depuis plus d'une occasion de le vérifier.

Quand Frédéric II, encore jeune prince, commença ses études de géométrie, son esprit précoce et ardent voulut anticiper sur tout. Ayant parcouru d'un œil fugitif

(*) Merian (Jean-Bernard), célèbre philosophe, né à Liechstall, canton de Bâle, le 28 septembre 1723, et mort à Berlin le 12 février 1807.

les différentes parties des mathématiques, il désira de savoir l'application et l'usage de chacune de ces parties, mais surtout celui de la géométrie transcendante. Sa curiosité infatigable fatigua ses maîtres. L'un d'eux, soit que lui-même n'en sût pas plus loin, soit pour se débarrasser des importunités du jeune questionneur, s'attacha à lui persuader que le calcul infinitésimal n'était qu'une affaire de pure ostentation, sans utilité réelle, que la méthode ordinaire suffisait à tout, et que celle des infiniment petits n'aboutissait qu'à des subtilités infiniment vaines et stériles.

Cependant, malgré le soin qu'on avait pris de le nourrir de ce préjugé, son esprit était trop pénétrant pour y acquiescer sans réserve, et ne pas se douter qu'on pouvait l'avoir induit en erreur. Pour se détromper entièrement, il eût fallu, sans doute, qu'il se familiarisât un peu avec ce nouveau calcul, ou que du moins il en acquît les notions les plus essentielles; mais il ne tarda pas à avoir bien d'autres choses à calculer.

Ce qui fait voir combien ce préjugé influait peu sur sa conduite, c'est qu'à peine monté sur le trône, il fit tout son possible pour attirer chez lui les premiers géomètres de l'Europe, et récompensa royalement ces mêmes travaux qu'on lui avait dépeints comme étant si inutiles et si frivoles. Il n'eût pas tenu à lui que toute la famille des Bernoulli, le père et les deux fils, ne se transplantât dans notre capitale, où il l'appela sous les conditions les plus honorables et les plus lucratives (*). M. Euler s'y

(*) Napoléon, qui avait tant de qualités communes avec Frédéric II, avait sur lui l'avantage d'avoir cultivé et aimé les sciences exactes. C'est lui qui apporta, d'Italie en France, le premier exemplaire de la *Géométrie du compas,* de Mascheroni. Il estimait les grands mathématiciens et les comprenait; il nomma Lagrange et Monge, Membres du Sénat dont Laplace était chancelier.

rendit de Pétersbourg, et fut succédé depuis par M. de Lagrange. M. de Maupertuis a longtemps présidé à cette Académie.

Tout cela n'empêcha pourtant pas le roi d'entretenir des doutes au sujet de la géométrie sublime. Dès le commencement de son règne, c'était encore la matière la plus fréquente de ses conversations avec les savants qui l'entouraient, et dans le commerce desquels il se délassait des soins du gouvernement. Ce fut alors que M. Jordan s'adressa à M. Euler, nouvellement arrivé, pour lui demander un court exposé des principaux avantages qui résultaient pour les sciences de l'analyse des infinis, afin de pouvoir s'en servir dans l'occasion. Personne n'était plus propre pour cette tâche que M. Euler. Il savait répandre la plus grande clarté sur les matières les plus abstruses, et descendre des plus hautes régions de la géométrie jusqu'à la portée la plus commune. C'est ce qu'on voit dans ses Lettres françaises à une princesse d'Allemagne, et c'est ce que l'on retrouvera dans ce Mémoire latin.

Au reste, je ne sais quel emploi M. Jordan a fait de ce Mémoire, s'il l'a traduit en français pour le mettre sous les yeux du roi, ou bien s'il s'est borné à lui en rapporter le contenu.

Mais ce qui prouve combien il importe de donner de bonne heure à la jeunesse, et surtout aux jeunes princes, des idées justes de toute chose, ou du moins de ne leur en donner jamais de fausses, c'est que le roi Frédéric a été toute sa vie flottant et incertain au sujet du calcul infinitésimal, et que cette fluctuation paraissait l'embarrasser, et quelquefois véritablement l'inquiéter.

Je parle ici d'après ma propre expérience. La première fois que je parus devant ce grand prince, il me fit, sur ce sujet, des questions, en m'enjoignant de lui dire en conscience ce que j'en pensais. Je répondis avec la mo-

destie qui me convenait, que j'avais malheureusement trop négligé mes études mathématiques, après avoir eu le bonheur d'en poser les fondements dans ma patrie sous les Bernoulli; que cependant je croyais en avoir assez retenu pour pouvoir assurer à Sa Majesté que le calcul infinitésimal était une des plus belles et des plus sublimes découvertes de l'esprit humain; qu'il avait fait faire des pas de géant à la géométrie, tant pure que mixte, ou appliquée à la physique; que, par son moyen, on était parvenu à résoudre des problèmes absolument inaccessibles à l'arithmétique et à l'algèbre communes, et qu'il facilitait la solution d'une infinité d'autres, qui, selon l'ancienne méthode, exigeraient les plus longues et les plus pénibles opérations. Pour le rendre plus sensible, je citai, le mieux que je pouvais, quelques exemples, entre autres le mouvement accéléré ou retardé des planètes et des comètes autour du soleil. Enfin, me servant d'un argument populaire, je le priai de vouloir bien considérer que, si ce calcul n'était pas un objet de la plus haute importance, il serait inconcevable que les plus grands hommes, les Newton, les Leibnitz, les Bernoulli, s'en fussent occupés avec tant de zèle, et se fussent disputé l'honneur de son invention avec tant de chaleur et d'animosité; ni que leurs plus illustres successeurs, les Euler, les Clairaut, les d'Alembert, consacrassent leurs veilles et leur vie entière à le perfectionner et à en reculer les bornes. Quoique le roi parût assez satisfait de cet éclaircissement, il y revenait sans cesse, et fit encore, en ma présence, les mêmes questions à M. de Lagrange, lequel y fit à peu près les mêmes réponses, quoique beaucoup mieux motivées et exprimées.

Mais voyons plutôt ce que M. Euler y avait répondu longtemps auparavant.

Personne ne révoque en doute l'utilité des mathématiques; car elles sont indispensables à plusieurs sciences et arts dont nous avons besoin chaque jour. Cependant on croit généralement que ce caractère d'utilité est propre aux parties inférieures et, pour ainsi dire, aux éléments des mathématiques. Quant à la partie que l'on appelle, à juste titre, supérieure, on nie qu'elle puisse trouver d'utiles applications. C'est comme la toile d'araignée, pense-t-on; elle n'est d'aucun usage, à cause de sa trop grande finesse. Et pourtant les mathématiques, en général, ont pour objet la recherche des quantités inconnues. A cet effet, elles nous montrent des méthodes, pour ainsi dire, des chemins qui nous mènent à la vérité; déterrent les vérités les plus enfouies, et les mettent en lumière. Ainsi, d'une part, elles donnent plus de vigueur à l'esprit; de l'autre, elles étendent le champ de nos connaissances. Peut-on se donner trop de peine pour un tel résultat? La vérité est par elle-même d'un grand prix; d'ailleurs toutes les vérités se tiennent entre elles, et il n'en est pas une qui soit dépourvue d'utilité, même lorsque d'abord cette vérité paraît sans usage. On objecte que les mathématiques supérieures pénètrent trop profondément dans la recherche de la vérité. Ceci est plutôt un éloge qu'une critique.

Mais ne nous arrêtons pas à ces mérites trop abstraits. Nous pourrons largement prouver que l'analyse supérieure a des droits non moins incontestables que les mathématiques élémentaires au titre de science utile, qu'elle est même d'un usage beaucoup plus étendu; et que les mathématiques, loin d'être trop avancées, laissent, au contraire, beaucoup à désirer dans l'intérêt de ces mêmes sciences, pour lesquelles les premiers rudiments semblent suffire. Je veux donc démontrer, dans ce Mémoire, que, si les mathématiques élémentaires sont utiles, les mathé-

matiques supérieures ne le sont pas moins, et même que le degré d'utilité va toujours croissant, à mesure que l'on s'élève dans l'étude de cette science; que cette science, enfin, est trop peu avancée pour ses applications les plus vulgaires. Pour atteindre mon but, je passerai en revue les sciences dont l'utilité, dont la nécessité est hors de doute, telles que la mécanique, l'hydrostatique, l'astronomie, l'artillerie, la physique et la physiologie. Je prouverai, jusqu'à l'évidence, que les plus utiles de ces sciences ont le plus besoin de l'analyse supérieure; que si parfois le fruit que nous en retirons est au-dessous de nos espérances, c'est presque toujours parce que les mathématiques transcendantes ne sont pas assez avancées.

Je commence par la mécanique, et par là je ne veux pas dire cette partie qui analyse les mouvements les plus compliqués et les ramène aux premières lois du mouvement; nul doute que l'analyse la plus subtile ne soit alors indispensable. Mais, quoique cette partie de la mécanique soit d'une utilité extrême, elle encourt ordinairement le reproche dont je veux laver les mathématiques supérieures. Je veux donc parler ici de la mécanique placée d'ordinaire au rang des éléments, de cette science qui crée des machines de toute espèce pour nos usages ordinaires, et qui jouit d'une réputation de grande utilité. Dans cette partie plus grossière de la mécanique, on considère les machines au point de vue de l'équilibre; on ne détermine que la force ou la puissance égale au poids que l'on doit soutenir à l'aide de la machine. Mais on devrait considérer le mouvement du poids, principalement dans la pratique, et on le néglige complétement. Les auteurs qui ont traité cette partie de la mécanique nous apprennent quelle est la force nécessaire dans chaque machine pour soutenir le poids à l'état d'équilibre; mais quand le poids doit se mouvoir, ils se contentent de nous enseigner qu'il faut une

force plus grande. Lors même qu'en réalité le poids doit se mettre en mouvement, ils ne disent pas si ce mouvement doit être retardé ou accéléré; ils n'ont aucun égard aux circonstances qui produisent ce mouvement. Aussi, les praticiens savent-ils bien que rarement une machine répond à leur espérance. Bien plus, ces déceptions sont mises sur le compte de la théorie, et les machines qu'elle invente n'inspirent guère de confiance tant qu'elles n'ont pas reçu la sanction de la pratique. Cette théorie élémentaire des machines est donc imparfaite (*); et en même temps on reconnaît la nécessité d'une théorie plus sûre, et s'accordant mieux avec la pratique. Mais ce n'est pas de la mécanique vulgaire qu'il faut attendre un tel service; elle ne traite que des principes de statique; elle n'a d'autre objet que l'équilibre. S'agit-il d'expliquer un mouvement; c'est pour elle une barrière infranchissable. Si vous voulez perfectionner la théorie des machines, étudiez le mouvement qui succède à l'équilibre rompu; déterminez la force qui sollicite le mobile, et surtout les causes extérieures qui résistent au mouvement; telles que le frottement et la résistance de l'air. C'est donc à la mécanique supérieure qu'il faut recourir; à celle qui analyse les mouvements les plus compliqués. Or, c'est ici que l'on

---

(*) Il ne faut pas oublier que ceci a été écrit vers le milieu du XVIII[e] siècle, avant que Carnot, Navier, Coriolis, MM. Poncelet, Combes, Morin eussent si considérablement perfectionné la science des machines; et ne pas oublier non plus que la théorie des forces vives appliquée à l'évaluation du travail mécanique a pour points de départ Leibnitz, Euler, Daniel Bernoulli. Soyons persuadés qu'on n'a rien, absolument rien inventé; à moins de regarder comme une invention, une méthode pour embrouiller l'enseignement élémentaire, méthode obscurcissante qui n'a pas même le mérite de la nouveauté. Elle repose sur la mesure Leibnitzienne de la force; conception métaphysique, idée complexe, combattue par d'Alembert, et qu'on prétend placer à l'entrée de la science! Toute méthode peut être imposée; mais acceptée, non.

a besoin du calcul infinitésimal, et de l'analyse la plus élevée; et même elle suffit à peine à expliquer les mouvements des machines les plus simples, malgré tous les perfectionnements, soi-disant inutiles, qu'elle a reçus jusqu'à ce jour. J'ai démontré tout cela, jusqu'à la dernière évidence, dans un Mémoire que j'ai publié à Saint-Pétersbourg (*) sur les machines simples et composées; j'y détermine, par l'analyse supérieure, les mouvements et leurs effets dans tous les cas possibles, et, comme un grand nombre, et même une infinité de machines semblables ou différentes peuvent servir au même but, j'y enseigne le moyen de découvrir celle qui produit son effet avec la moindre perte de temps ou de force, problème dont la solution est d'une application continuelle dans la vie, et cette solution repose sur les théories les plus profondes de l'analyse et du calcul infinitésimal. La mécanique pourrait nous fournir une foule d'autres arguments, pour prouver que les mathématiques supérieures nous offrent un grand nombre d'applications dans la vie ordinaire; mais les quelques lignes qui précèdent me paraissent suffire grandement à démontrer, ainsi que je me l'étais proposé, que les mathématiques supérieures sont indispensables à la mécanique, et même que la mécanique élémentaire, si utile de l'aveu général, ne saurait se soutenir ni faire un pas sans leur appui.

Je passe donc à l'hydrostatique, dans laquelle je comprends aussi l'hydraulique, science qui rend journellement tant de services à l'homme; personne ne l'ignore. Portons notre attention plus spécialement sur la partie à laquelle on attribue ces services, sur l'hydrostatique ordinaire, dite *élémentaire*. C'est là surtout que les praticiens

---

(*) *De Machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucro.* (Comm. Petrop., X, 1747; p. 67.)

se plaignent de ce que le succès répond si rarement à la théorie. Ces plaintes sont loin d'être dénuées de fondement; car la théorie des eaux courantes que l'on explique dans les écoles est presque entièrement erronée, et l'on doit s'étonner qu'elle ne soit pas plus en désaccord avec l'expérience. Il serait donc de l'intérêt général de substituer une théorie exacte à cette théorie fausse, mais les mathématiques élémentaires seraient fort impuissantes pour cette tâche : l'assistance de l'analyse supérieure peut seule nous permettre d'aborder une pareille œuvre. On pourra facilement s'en convaincre en lisant l'excellent livre que le célèbre Daniel Bernoulli a publié sur l'hydrodynamique (*); il nous y fait découvrir les lois naturelles qui régissent les fluides en mouvement, et en facilitent l'application. Ensuite son père, avec cet esprit si ingénieux qui l'avait déjà rendu célèbre, démontra les mêmes lois par d'autres principes, et crut corroborer la vraie théorie des eaux en mouvement. Dans ces deux Traités, le calcul infinitésimal se rencontre à chaque pas. C'est donc à notre ignorance de l'analyse supérieure que nous devons nous en prendre, si nous sommes parvenus si tard à une théorie vraie de l'hydraulique. C'est donc par les progrès de l'analyse que cette théorie pourra s'élever à son plus haut point de perfection, et, par conséquent, à son maximum d'utilité.

Que l'astronomie soit une des parties les plus utiles des mathématiques, tout le monde l'accordera facilement. Or cette utilité est liée à l'exactitude de la théorie, à l'accord de cette théorie avec les phénomènes célestes; donc évidemment cette utilité croît avec le perfectionnement de la science. Tant que le vrai système des corps célestes et de leurs mouvements fut inconnu, l'arithmétique, les élé-

---

(*) Dan. Bernoulli : *Hydrodynamica*. Strasb. 1738; in-4.

ments de géométrie et d'optique suffisaient à l'astronome. Mais, en découvrant les lois véritables du mouvement des corps célestes, Kepler sentit lui-même tout d'abord que les mathématiques élémentaires n'étaient plus à la hauteur de l'astronomie. Newton vint ensuite achever miraculeusement l'œuvre de Kepler; et, pour cela, quel arsenal de calculs n'emprunta-t-il pas aux mathématiques supérieures? Nul n'en peut douter, après avoir parcouru son incomparable ouvrage. Nous y apprenons que les planètes tracent des ellipses autour du soleil, et que les aires décrites par leurs rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps. Donc, pour construire les Tables des mouvements des planètes, il faut connaître la quadrature de l'ellipse, ce qui n'est certes pas du ressort des mathématiques élémentaires. D'autres problèmes, des plus utiles et des plus nécessaires, servent à déterminer les orbites mêmes des planètes d'après les observations, et ceux-là exigent encore plus impérieusement le secours de l'analyse supérieure. On pourrait encore moins s'en passer dans la recherche des trajectoires des comètes (*voir* mes *Mélanges de Berlin*, tome VII) (*). D'un autre côté, la théorie de la lune, quoique étendue et raffermie par les démonstrations aussi solides qu'heureuses de Newton, n'a pu cependant être menée à bonne fin. C'est que l'achèvement de cette théorie exige la solution de problèmes de mécanique si nombreux et si difficiles, que l'analyse infinitésimale, toute avancée qu'elle paraisse, ne saurait y suffire. Enfin, on sait que les observations nécessitent des corrections à cause de la réfraction. Or une Table de réfraction ne peut être construite à l'aide de l'expérience seule; il faut que la théorie détermine, pour une hauteur

(*) Eulerus: *Determinatio orbitæ cometæ ann. 1742 observatæ, in Miscell. Berol.*, VII, p. 1.

quelconque, les effets de la réfraction, et cette théorie est obligée d'emprunter à l'analyse supérieure ses calculs les plus délicats. Le célèbre Bouguer (*) nous l'apprend clairement dans son Mémoire édité à Paris sur ce sujet. De tout ce qui précède, on peut conclure d'abord que l'astronomie a le plus grand besoin de l'analyse infinitésimale, et ensuite que l'analyse elle-même est encore loin d'être assez avancée pour ses applications à l'astronomie.

L'artillerie est mise ordinairement au nombre des branches des mathématiques, et c'est à ce titre qu'elle rend le plus de services dans l'art de la guerre. Outre quelques problèmes de géométrie bien connus, qui ont pour but de déduire du diamètre le poids du boulet, et réciproquement, on y considère principalement le chemin décrit par le projectile que lance le canon, et l'on conclut les règles suivant lesquelles il faut diriger le canon, pour que le boulet frappe un lieu donné. Or on suppose, dans cette recherche, que le projectile décrit une parabole, ainsi que Galilée l'a démontré. Mais cela n'est pas conforme à la vérité dès que le mouvement n'a pas lieu dans le vide. On est donc induit grandement en erreur par les règles et les Tables fondées sur cette hypothèse, leurs auteurs mêmes l'avouent; ils rejettent l'erreur sur le compte de la théorie, et s'imaginent qu'elle n'a de valeur que lorsque la pratique la corrige. Or l'air nous paraît être un fluide trop subtil pour produire une résistance sensible; et pourtant, dans les mouvements très-rapides, tels que ceux des boulets et des bombes, la résistance de l'air est assez grande pour que le projectile décrive une courbe très-différente de la parabole. Pour corriger cette erreur notable, pour suppléer à l'emploi

(*) *Essai d'Optique*. Paris, 1729; in-8.

inopportun de la parabole, il faut introduire la courbe véritable suivant laquelle le projectile se meut dans l'air. Newton paraît avoir fait beaucoup d'efforts pour la découvrir, et cependant son extrême habileté dans l'analyse supérieure ne lui suffit pas pour résoudre ce problème. Il laissa l'honneur de cette découverte au célèbre Jean Bernoulli (*). Nous voyons combien doit être versé dans les mathématiques supérieures celui qui veut résoudre des questions d'artillerie. Sous d'autres rapports, l'artillerie était indigne, jusqu'à ce jour, du nom de science, tant était grande son ignorance des principes qui la concernent. Outre le mouvement des projectiles, elle n'avait pas encore assez étudié la force et l'action de la poudre, et c'est là le pivot de la science. C'est de nos jours seulement qu'un habile anglais, Robins (**), a trouvé, par une suite de profonds raisonnements, la véritable théorie de la force de la poudre à canon. Il calcule d'abord la force que développe l'inflammation de la poudre, et la vitesse qu'elle imprime au boulet; puis il détermine le mouvement même du projectile. Les expériences n'ont pas peu contribué, sans doute, à ses résultats; mais, s'il n'avait eu à sa disposition l'analyse supérieure, il lui eût été impossible d'imaginer ces expériences, ni d'en rien conclure.

Deux mots suffiront pour la navigation; car personne, j'imagine, n'osera contester ici l'utilité des mathématiques supérieures. Si nous considérons la marche du navire porté par l'Océan, nous penserons tout d'abord à la courbe loxodromique, dont l'invention ne peut assurément être attribuée aux mathématiques élémentaires. Cette courbe sert à résoudre la plupart des problèmes qui

---

(*) *De Motu corporum gravium pendulorum et projectilium.*

(**) Robins : *New principles of gunnery*. London, 1742; in-8.

s'offrent à quiconque veut étudier l'art de régler la course du navire. La théorie entière de la navigation, théorie qui pose les bases de la construction et de la conduite des vaisseaux, est tellement ardue, exige une connaissance si profonde de la mécanique et de l'hydrostatique, que le secours de l'analyse supérieure y est de première nécessité. La détermination de la position que le navire occupera dans l'eau demande un calcul considérable. Veut-on en déduire la forme que doit avoir le navire, et mesurer la charge qu'il doit porter pour que l'équilibre soit stable, pour que le navire supporte la traction des voiles et résiste au chavirement; c'est alors qu'il faut en venir à des calculs de la plus grande profondeur. Veut-on enfin découvrir l'art de disposer les voiles et de conduire le navire à son but, malgré le vent contraire; on n'y parviendra jamais sans l'aide de l'analyse supérieure. On trouve tout cela de la dernière évidence en lisant l'excellent ouvrage de Bernoulli (*) sur la manœuvre des vaisseaux. J'ai traité la même matière avec plus de développements dans deux livres que j'ai publiés sur la science de la navigation. Ainsi, nul doute ne peut subsister maintenant sur ce sujet.

La physique, cette science qui étudie tous les phénomènes de la nature, fût-elle dépourvue de toute utilité manifeste, que cependant l'élévation et la grandeur du but attacheraient encore à cette science tout homme qui aimerait la vérité, et par cela seul, toutes les sciences qui donnent à la physique plus d'étendue et de perfection devraient être à nos yeux d'une importance extrême. Mais la physique est la source la plus profonde en résultats utiles pour la vie ordinaire. Que dira-t-on alors des ma-

---

(*) *Essai d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux.* Bâle, 1714; in-4.

2.

thématiques supérieures, si je prouve que, sans elles, il n'y a pas de progrès possible en physique? D'abord la plupart des phénomènes que nous savons expliquer appartiennent aux mathématiques aussi bien qu'à la physique : tels sont ceux qui sont expliqués par la mécanique, l'hydrostatique, l'aérométrie, l'optique et l'astronomie. Ensuite, dans tous les phénomènes où l'on observe quelque modification de la matière, ne faut-il pas surtout avoir égard au mouvement? voir par quoi et de quelle façon il est produit? quelles variations il subit? etc.; toutes études qui exigent des connaissances profondes de la mécanique, et une étude encore plus profonde de l'hydrodynamique, dès qu'il y a fluidité. Or toutes les modifications de la matière observées dans la nature sont dues au mouvement; il est donc clair que la mécanique, c'est-à-dire la science du mouvement, est nécessaire pour expliquer même le plus simple changement qui se produit dans l'univers. Si l'on envisage de près les phénomènes qui paraissent les plus simples, si l'on veut les ramener aux lois de la mécanique, ils présentent tant de complication, qu'il est impossible de les expliquer, même en faisant usage de l'analyse supérieure. Ce cas se présente principalement dans la physiologie, qui étudie les mouvements des êtres vivants. Dans son état actuel, cette branche de la physique nous offre des phénomènes qu'il est impossible d'expliquer, et qui exigeraient des notions complètes sur les mouvements des solides et des liquides, jointes à une connaissance profonde de l'analyse supérieure. Qui oserait s'aventurer, sans de pareilles ressources, à des recherches sur le mouvement imprimé au sang par le cœur, et sur la marche du sang dans les artères et dans les veines? Avant d'aborder une telle explication, il faut arriver à la solution de problèmes nombreux et difficiles, solution pour laquelle l'analyse supérieure est encore impuissante,

quelque avancée qu'elle paraisse. Tout cela semblera plus clair que le jour, si l'on veut lire les auteurs qui ont essayé de donner une explication rationnelle des phénomènes de la physique et de la physiologie. Je me contenterai de citer le livre de Borelli (*) sur le mouvement des êtres vivants. On y voit presque à chaque page combien il a besoin de toute la force de l'analyse pour arriver à son but, et souvent, lorsque ce secours lui fait défaut, il s'arrête découragé, et ne sait où chercher un appui. Borelli était pourtant fort instruit dans les mathématiques de son temps; mais elles n'ont reçu que plus tard les développements nécessaires pour les recherches de ce genre.

Je crois avoir amplement atteint le but que je m'étais proposé, de rendre évidente l'extrême utilité de l'analyse supérieure. D'autres arguments, en grand nombre, pourraient confirmer ma démonstration; je pourrais prouver que l'analyse donne à l'esprit plus de vigueur et le rend plus apte à la recherche de la vérité. Mais les ennemis des mathématiques trouveraient ici matière à discussion. Mes premiers arguments sont irréfutables, et je m'y arrête.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1843 (**);

Par M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

Composition d'analyse.

Trouver l'équation des surfaces, telles que, si, d'un point donné A *on abaisse une perpendiculaire sur un*

(*) J.-Alph. Borelli : *De Motu animalium.*

(**) Nous ne donnerons, de cette année, que la composition d'analyse, attendu que celle de mécanique n'était autre chose que l'analyse du pendule conique.

plan tangent, le rectangle de cette perpendiculaire et de la portion de la normale comprise entre le point de contact M *et un plan* P *mené par le point* A, *soit équivalent au carré de* AM.

Si l'on prend A pour origine des coordonnées rectangulaires, et le plan P pour celui des xy; x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque M d'une des surfaces demandées,

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \pm\frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \text{et} \quad \pm z\sqrt{1+p^2+q^2}$$

représentent respectivement AM, la distance de A au plan tangent en M, et la portion de la normale en M, qui est définie dans l'énoncé; mais il faut prendre, devant les deux dernières expressions, le signe pour lequel elles sont positives.

Les surfaces cherchées sont donc celles qui satisfont, soit à l'équation

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = z(z-px-qy), \\ \text{ou} \\ zx\dfrac{dz}{dx}+yz\dfrac{dz}{dy}+x^2+y^2=0, \end{cases}$$

soit à l'équation

$$(2)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = -z(z-px-qy), \\ \text{ou} \\ zx\dfrac{dz}{dx}+yz\dfrac{dz}{dy}-x^2-y^2-2z^2=0. \end{cases}$$

Par la méthode de M. Jacobi, l'intégrale de l'équation (1) se déduit de celles des équations simultanées

$$\frac{dx}{zx}=\frac{dy}{xy}=-\frac{dz}{x^2+y^2},$$

qui sont

$$\frac{y}{x} = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2;$$

et cette intégrale est

(3) $$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

On obtient de même l'équation

(4) $$x^4 = (x^2 + y^2 + z^2) . \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

dans laquelle ψ désigne encore une fonction arbitraire, pour l'intégrale de l'équation (2).

Les surfaces comprises dans les équations (3) et (4) présentent deux caractères communs :

1°. *Elles ont, pour centre, le point* A ; car ces équations ne changent pas quand on remplace x, y, z par $-x$, $-y$, $-z$.

2°. *Le plan* P *ou* xy *est un plan diamétral principal ;* car ces équations donnent deux valeurs de z égales, et de signes contraires pour chaque système de valeurs de x, y.

Si l'on coupe les surfaces comprises dans l'équation (3) *par des plans conduits suivant* Az, *on a toujours un cercle dont le centre est* A. En effet, pour avoir l'équation d'une de ces sections par rapport à Az et à la trace Ax' de son plan sur xy, il suffit de faire dans l'équation

$$x = x' \cos\theta, \quad y = x' \sin\theta$$

(θ désignant l'angle x'Ax compté de Ax vers Ay) ; ce qui donne

$$x'^2 + z^2 = \varphi(\text{tang}\,\theta),$$

équation qui représente une circonférence, si

$$\varphi(\text{tang}\,\theta) > 0 ;$$

l'origine A seulement, si

$$\varphi(\tang \theta) = 0,$$

et qui ne représente rien, si

$$\varphi(\tang \theta) < 0.$$

Enfin, on voit facilement que l'origine est un point isolé des surfaces comprises dans l'équation (4).

EXPOSITION ANALYTIQUE DES POINTS EN INVOLUTION ET DES RAPPORTS COMPOSÉS SEGMENTAIRES.

I. *Involution.*

1. *Définition.* Si l'on porte sur une droite, à partir d'un point fixe pris pour origine, des longueurs proportionnelles aux racines d'une équation algébrique de degré m, ayant égard à leurs signes, les points ainsi déterminés sont dits *points-racines.*

Observation. Aux racines égales correspondent des points conjugués multiples; aux racines imaginaires, des points imaginaires qui donnent des résultats réels, lorsque les racines sont combinées symétriquement; résultats dont il faut tenir compte quand il s'agit de ce genre de combinaisons.

2. *Définition.* Soit

$$a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \ldots + a_{m+1} = 0$$

une équation algébrique donnant lieu à un système de n points-racines; prenons une distance quelconque l, qui détermine un point que nous désignons par C; le produit des distances du point C aux m points-racines est évidem-

ment égal à

$$l^m + \frac{a_2}{a_1} l^{m-1} + \ldots + \frac{a_{m+1}}{a_1};$$

ce produit est la *puissance* du point C relativement au système des m points-racines. Le point C peut se nommer *point-potentiel*.

Observation. La puissance de l'origine est $(-1)^m \frac{a_{m+1}}{a_1}$.

3. *Définition.* Si plusieurs systèmes de points-racines, placés sur la même droite, ont la même *puissance* par rapport au même point-potentiel C, ces systèmes équivalents sont dits *en involution*, et le point-potentiel porte le nom de *centre d'involution*, ou simplement de *point central*.

4. Théorème. *Étant donné un système de n équations algébriques*

$$(1) \quad P + Q_1 = 0, \quad P + Q_2 = 0, \ldots, \quad P + Q_n = 0,$$

P, Q, $Q_2, \ldots, Q_n$ *sont des fonctions algébriques entières de x. Si les $n - 1$ équations*

$$(2) \quad Q_1 - Q_2 = 0, \quad Q_1 - Q_3 = 0, \ldots, \quad Q_1 - Q_n = 0,$$

ont des racines communes, les n systèmes de points-racines donnés par les équations (1) *sont en involution, par rapport à chaque point déterminé par une des racines communes au système* (2).

Démonstration. Soit r une des racines communes au système (2); cette valeur étant mise à la place de x dans chacune des équations du système (1) donne des résultats égaux, car la différence entre deux quelconques de ces résultats est nulle; mais chacun de ces résultats est la puissance du point déterminé par r, par rapport à un système de points-racines, § 2, donc C est un point cen-

tral, et tous les n systèmes de points-racines sont en involution.

Corollaire. Si l'on veut ajouter un nouveau système de p points en involution avec les n systèmes, il est évident qu'on peut prendre $p-1$ de ces points à volonté. Si le point C fait partie des $p-1$ points, le $p^{ième}$ point est situé à l'infini; car zéro entre alors comme facteur dans le dénominateur de la fraction qui détermine le $p^{ième}$ point.

5. Les trois systèmes des points-racines donnés par les équations

$$P+Q_1=0, \quad P+Q_2=0, \quad P+Q_1(1-m)+mQ_2=0,$$

sont en involution; car les deux différences Q_1-Q_2, $m(Q_1-Q_2)$ étant égalées à zéro, ont les mêmes racines (4).

Si P, Q_1, Q_2 sont des fonctions entières à deux variables x, y; alors les trois équations représentent trois courbes algébriques passant par les mêmes points; car la troisième équation s'obtient en ajoutant la première, multipliée par $1-m$, à la seconde, multipliée par m. Faisant

$$y=0$$

dans les trois équations, on a trois équations dont les points-racines sont les intersections des trois courbes avec l'axe des x; et, d'après ce qui vient d'être dit, les systèmes sont en involution. On a donc le théorème suivant.

6. Théorème.

$$R=0, \quad S=0, \quad (1-m)R+mS=0$$

étant les équations de trois courbes algébriques, une sécante quelconque les coupe en trois systèmes de points qui sont en involution; et il y a autant de centres d'involution que l'équation $R-S=0$ *a de racines.*

Le théorème de Desargues est compris dans ce théorème général.

Observation. On a un théorème analogue, si R, S étant des fonctions à trois variables, les équations représentent des surfaces.

7. Les coniques étant toujours le principal sujet d'investigations géométriques, et ces courbes n'étant rencontrées par une droite qu'en deux points, on n'a guère étudié que l'involution d'un système de deux points-racines chacun.

8. Une équation *réciproque* de degré $2n$ donne un système n de deux points-racines en involution relativement à l'origine, la puissance étant 1.

9. Soient les trois équations

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$
$$b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0,$$
$$c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0;$$

pour que les trois systèmes de deux points-racines soient en involution, il faut et il suffit que les deux équations

$$x\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1}\right) + \frac{a_3}{b_1} - \frac{b_3}{b_1} = 0,$$
$$x\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{c_2}{c_1}\right) + \frac{a_3}{a_1} - \frac{c_3}{c_1} = 0$$

aient une racine commune; ce qui donne la relation

(1) $$\text{déterminant } (a_1 b_2 c_3) = 0;$$

et, lorsque cette relation subsiste, les trois systèmes sont en involution. Le centre d'involution est déterminé par l'équation

$$x = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_1 - a_1 c_2};$$

en réduisant au même dénominateur les deux valeurs égales de x, on retrouve l'équation (1).

En éliminant x^2 et x entre les trois équations, on a encore l'équation (1); donc une de ces équations est une conséquence des deux autres; de sorte qu'on a la relation

$$c_1 = a_1 + nb_1, \quad c_2 = a_2 + nb_2, \quad c_3 = a_3 + nb_3.$$

Donnant à n une valeur quelconque, même imaginaire, on trouve tous les couples de points en involution avec les deux premiers couples.

Observation. L'équation (1) n'est autre que l'équation (1) de M. Chasles (*Géométrie supérieure,* page 155).

10. Reprenons l'équation

$$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0;$$

soient α_1, α_2,..., α_n les n racines; $l-\alpha_1$, $l-\alpha_2$,..., $l-\alpha_n$ sont les n distances du point C aux n points-racines, § 2. Une fonction symétrique de ces distances s'exprime en fonction de l, et des coefficients de l'équation. Les systèmes de points-racines pour lesquels cette fonction est constante, relativement au même point C, sont dans une relation involutive. On n'a étudié jusqu'ici que les *produits* qui donnent des propriétés géométriques d'un énoncé simple, et aussi les *sommes* qui se rattachent aux points de moyenne distance; mais toute fonction symétrique renferme quelque théorème de géométrie. On peut même dire que les principales propriétés des lignes et des surfaces ne sont que l'expression *graphique* de quelque fonction symétrique. La théorie de ces fonctions est le fondement de toute la géométrie supérieure. Aussi n'a-t-on pas manqué de retrancher cette théorie du nouvel enseignement; car nous ne devons connaître d'autre supériorité que celle de nos *faiseurs*. Soit.

II. *Rapports composés segmentaires.*

11. Le produit de plusieurs rapports géométriques est un *rapport composé*. Soit une équation de degré $2n$ donnant autant de points-racines. Décomposons ces $2n$ racines en n groupes de deux racines chacun ; prenant la différence de deux racines dans chaque groupe, on aura n segments. Désignons le produit de ces n segments par P ; faisant une seconde décomposition semblable, on parvient à un autre produit R. Le rapport $\frac{P}{R}$ ou $\frac{R}{P}$ est un *rapport composé segmentaire*.

12. *Lemme.*

$$a - b = c,$$

$$\frac{p}{a} - \frac{p}{b} = -\frac{pc}{ab}.$$

13. Théorème. *Si, dans un rapport composé segmentaire, on remplace chaque racine* α *par* $\frac{p}{\alpha}$, p *étant un nombre donné, le rapport reste le même.*

Démonstration. Si en remplaçant chaque racine α par $\frac{p}{\alpha}$, le produit que nous désignons par P devient $(-p)^n \frac{P}{S}$, le produit R devient $(-p)^n \frac{R}{S}$, S étant le produit des $2n$ racines (*lemme* 12). Donc le rapport ne change pas.

14. *Lemme.* Soit l'équation

$$a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \ldots + a_m x + a_{m+1} = 0;$$

si l'on a la relation

$$\frac{a_{r+1} \cdot a_{m+2-r}}{a_r \cdot a_{m+1-r}} = p,$$

p étant un nombre donné; pour n impair, l'équation a une racine égale à $-p$, et les $n-1$ autres racines se partagent en $\frac{n-1}{2}$ groupes de deux racines, dont le produit est p; pour n pair, les racines se partagent en $\frac{n}{2}$ groupes de deux racines, dont le produit est p.

Observation. Cette équation est dite *réciproque*, dans le sens général. On applique ordinairement cette dénomination à une équation lorsque $p=1$. Nous conservons le sens général.

15. *Corollaire.* Une équation réciproque de degré $2n$ est une involution de n groupes de deux points-racines, l'origine étant le centre d'involution. Formons un rapport composé segmentaire avec un nombre p de ces racines. Remplaçons, dans ce rapport, chaque racine par son inverse, on aura un rapport composé, qui sera encore segmentaire, car les *inverses* sont aussi *racines de l'équation;* et ce second rapport segmentaire sera égal au premier (13).

Rapport segmentaire binaire.

16. Un rapport *binaire* est le produit de deux rapports. Considérons quatre points-racines donnés par les racines α, β, α_1, β_1, que ces points suivent l'ordre croissant de grandeur de gauche à droite; on peut former trois rapports binaires,

$$\frac{(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\beta)}{(\beta_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)}, \quad \frac{(\beta_1-\alpha)(\beta-\alpha_1)}{(\beta-\alpha)(\beta_1-\alpha_1)}, \quad \frac{(\beta-\alpha)(\alpha_1-\beta_1)}{(\alpha_1-\alpha)(\beta-\beta_1)}.$$

Dans chaque rapport, chacune des racines paraît deux fois. Le premier et le troisième rapport sont positifs, et le deuxième est négatif. Ces trois rapports sont maintenant connus sous le nom de rapports *anharmoniques;*

lorsque le rapport est égal à -1, on le nomme *rapport harmonique.*

Observation. Chez les anciens, le second rapport s'écrivait aussi

$$\frac{(\beta_1 - \alpha)(\alpha_1 - \beta)}{(\beta - \alpha)(\beta_1 - \alpha_1)}.$$

Il était positif, et devenait *harmonique,* lorsqu'il était égal à $+1$; mais alors il n'y a plus de symétrie dans l'expression. C'est ce qui a engagé M. Chasles à changer le signe et à écrire $\beta - \alpha_1$, au lieu de $\alpha_1 - \beta$. D'ailleurs le célèbre géomètre ne fait point usage de la notation des points-racines. Cette notation rendrait peut-être plus mnémoniques les précieuses et nombreuses équations qui se rattachent aux rapports harmoniques, et qui sont consignées dans la *Géométrie supérieure.* L'idée des points-racines appartient à M. Gauss (*voir* t. I, p. 444).

REMARQUES SUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS x^a ET a^x;

Par M. SCHLOMILCH,
Professeur à Dresde.

La manière ordinaire de développer les dérivées de x^a et a^x consiste à recourir à la formule du binôme démontrée par quelques considérations relatives aux combinaisons. Mais, comme les formules qu'il s'agit de développer sont fort simples, il vaut mieux éviter l'emploi d'une formule plus compliquée; cela se fait facilement à l'aide de la formule tout à fait élémentaire

$$(1) \quad \frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} b^2 + \ldots + b^{m-1},$$

comme nous le ferons voir.

1. Quant à la dérivée de la fonction x^m, on a

$$\frac{d(x^m)}{dx} = \lim \frac{(x+\delta)^m - x^m}{\delta} = \lim \frac{(x+\delta)^m - x^m}{x+\delta-x};$$

et, en faisant usage de la formule (1), on trouve sur-le-champ

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$

Après avoir démontré cette formule pour le cas d'un exposant positif et entier, il est très-facile de la généraliser par des méthodes connues : on fera

$$x^{\frac{p}{q}} = y,$$

par conséquent,

$$x^p = y^q,$$

ce qui donne

$$\frac{d(x^p)}{dx} = \frac{d(y^q)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdots$$

2. Pour développer la dérivée de la fonction a^x, il est nécessaire de démontrer que l'expression $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ converge vers une limite déterminée quand on fait croître à l'infini le nombre s. Cela se fait de la manière suivante : En supposant $a > b$, l'équation (1) donne l'inégalité

$$\frac{a^m - b^m}{a-b} < ma^{m-1} \quad \text{ou} \quad a^m - b^m < m(a-b)a^{m-1};$$

on tire de là

(3) $$[a - m(a-b)]a^{m-1} < b^m;$$

et, en prenant

$$a = 1 + \frac{1}{m-1}, \quad b = 1 + \frac{1}{m},$$

on a immédiatement

$$(4) \qquad \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Cela prouve que la quantité $\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}$ croît toujours, si s est un nombre positif et entier qui devient infiniment grand.

Prenons maintenant

$$a = 1 + \frac{1}{2n}, \quad b = 1 \quad \text{et} \quad m = n + 1;$$

alors l'inégalité (3) se change en celle-ci :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < 1, \quad \text{ou} \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < 2.$$

Il s'ensuit

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4 \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < 4,$$

en vertu de la formule (4).

La quantité $\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}$ reste donc toujours inférieure au nombre 4; on en conclut qu'il doit exister une limite déterminée vers laquelle converge l'expression dont il s'agit; cette limite est comprise entre les nombres $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$ et 4; en la désignant par e, nous aurons

$$\lim \left(1+\frac{1}{s}\right)^{s} = e,$$

pourvu que s soit un nombre positif et entier. La démonstration, pour le cas de s fractionnaire ou négatif, se fait de la même manière, comme on le voit dans les Traités du calcul différentiel.

SOLUTION DE LA QUESTION 167

(voir t. VI, p. 394);

Par M. H. FAURE.

On sait que le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur les tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3}\omega,$$

l'équation de l'hyperbole équilatère étant

$$a^2 = \rho^2 \cos 2\omega.$$

M. W. Roberts propose de démontrer que la longueur d'un quadrant de cette podaire est égale à trois fois la différence entre l'arc infini de l'hyperbole équilatère et son asymptote.

Cette question se trouve résolue par l'auteur, dans le tome X des *Annales* de M. Liouville; il l'a déduite d'une proposition plus générale, au moyen des fonctions elliptiques. Nous allons la démontrer, en suivant une autre marche que nous appliquerons à l'équation $a^m = \rho^m \cos m\omega$, qui comprend l'hyperbole équilatère comme cas particulier. On reconnaît facilement la forme de cette courbe; elle se compose de m branches infinies, ayant pour asymptotes des droites qui font avec l'axe polaire des angles égaux à $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$, $\frac{5\pi}{2m}$, ..., $\frac{(2m-1)\pi}{2m}$. On trouve pour équation de la première podaire,

$$\rho^{\frac{m}{m-1}} = a^{\frac{m}{m-1}} \cos \frac{m}{m-1}\omega.$$

Si l'on projette de même le centre de notre courbe sur la tangente à celle-ci, on trouvera, pour la deuxième podaire,

$$\rho^{\frac{m}{2m-1}} = a^{\frac{m}{2m-1}} \cos \frac{m}{2m-1}\omega.$$

Soit E l'excès de la longueur d'une asymptote de la courbe représentée par $a^m = \rho^m \cos m\omega$, sur la branche de courbe correspondante, et soit S la longueur d'une demi-boucle de la deuxième podaire. Nous allons démontrer que

$$E = \frac{m-1}{2m-1} S.$$

En effet, si l'on calcule l'arc de la podaire d'après la formule

$$S = \int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

on trouvera

$$S = a(2m-1) \int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}},$$

en posant

$$\rho = az^{2m-1}.$$

La même formule donne, pour l'arc de l'autre courbe,

$$S' = -a \int \frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^{2m}}},$$

en posant

$$\rho = \frac{a}{z}.$$

Or

$$-a \int \frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^{2m}}} = \frac{a\sqrt{1-z^{2m}}}{2} + (m-1)a \int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}}.$$

Pour avoir la différence entre deux longueurs très-considérables, portées, la première, sur l'asymptote, à partir du centre, et la seconde sur la courbe $a^m = \rho^m \cos m\omega$,

à partir du sommet, il faut voir ce que devient la différence $\rho - S$ lorsque ρ est infini, ou $\frac{a}{z} - S'$ pour $z = 0$. Or

$$\frac{a}{z} - S' = \frac{a}{z} - \frac{a\sqrt{1 - z^{2m}}}{z} - (m-1)a\int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1 - z^{2m}}} = E.$$

Nos intégrales doivent être prises entre 0 et 1. Entre ces limites, les deux quantités qui précèdent le signe $\int$ s'évanouissent; donc,

$$E = -(m-1)a\int \frac{z^{2m-2}\,dz}{\sqrt{1 - z^{2m}}}.$$

Par suite, puisqu'il faut renverser les limites pour l'une ou l'autre de ces intégrales,

$$E = \frac{m-1}{2m-1} S.$$

Dans le cas particulier de la question, il faut faire

$$m = 2,$$

ce qui donne

$$E = \frac{1}{3} S, \quad \text{ou} \quad S = 3E.$$

SUR LA LOCUTION : DIVISER UNE DROITE EN EXTRÊME ET MOYENNE RAISON

(voir t. III, p. 5).

Cette locution française est une traduction littérale de la locution grecque : ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. On rencontre cette expression au moins quinze fois dans Euclide, et tous les manuscrits, soit de cet auteur, soit des auteurs grecs qui ont écrit après lui, ne varient pas sur

cette expression, et la rapportent de la même manière. Ainsi, il y a certitude que nous possédons la véritable Leçon d'Euclide. On cite contre cette Leçon un texte arabe (tome III, page 8) ; mais l'autorité d'une *traduction* française d'un texte qui est la *traduction arabe* d'un texte grec ne peut prévaloir contre le texte grec lui-même, imprimé depuis 1533 (*Bas. in-folio, curâ Simonis Grynaei*).

Cette Leçon, traduite littéralement en français, est une réunion de mots ne présentant aucun sens. C'est que, probablement, on a ici affaire à une locution du genre elliptique. On en trouve de semblables dans toutes les langues, et surtout dans les langues anciennes. Chaque manuscrit étant jadis le produit d'un travail isolé, on avait intérêt à économiser les mots pour gagner du temps, et aussi pour ménager la place ; car la matière sur laquelle on écrivait, papier ou parchemin, était rare et assez chère. Pour compléter l'expression elliptique d'Euclide, il faut s'abandonner aux conjectures. En voici une qui me paraît assez vraisemblable.

Soit une droite divisée d'une manière quelconque en deux segments inégaux a et b, et soit $b > a$; les trois quantités a, b, $a + b$ sont écrites suivant leur ordre de grandeur : b, qui est au milieu, est la quantité *moyenne* ; a et $a + b$, aux extrémités, sont les quantités *extrêmes*. Combinées deux à deux, ces trois quantités donnent lieu à six raisons, parmi lesquelles il n'y en a que deux qui puissent devenir *égales*, savoir : la *raison* tirée de l'extrême a, ou $\frac{a}{b}$, et la raison tirée de la moyenne b, savoir $\frac{b}{a+b}$; on peut avoir

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}.$$

La raison $\frac{a}{b}$ aura pris le nom de *raison de l'extrême*, ou

simplement *extrême raison*; et la raison $\frac{b}{a+b}$, *raison de la moyenne* ou *moyenne raison*. Il s'agit donc de partager une droite de manière que la moyenne raison soit égale à l'extrême raison, et plus brièvement encore, *partager une droite en moyenne et extrême raison*. Il faut donc conserver cette locution ancienne, aujourd'hui généralement comprise, et qui a pour elle le droit de prescription.

Si on voulait s'exprimer en langage moderne, il faudrait dire : *Partager une droite en deux segments formant avec cette droite une proportion continue*. C'est la formule adoptée par Lorenz (Jean-Frédéric), dans son excellente traduction allemande des quinze Livres d'Euclide; 1781.

Dans la géométrie moderne, cette section segmentaire n'est guère employée que pour la construction du décagone, et n'a aucune importance dans la géométrie segmentaire, parce qu'elle ne se projette pas *coniquement*, mais cylindriquement. Cette dernière projection est l'objet implicite de la septième proposition du quatorzième Livre (*). Les six dernières propositions du treizième Livre consacrées à la construction des cinq corps réguliers, contiennent des applications de la section *continue*; de même, le quinzième Livre, qui traite aussi de la même construction. D'ailleurs, on sait que le quatorzième et le quinzième Livres ne sont évidemment pas d'Euclide; on les attribue à Hypsiclès, géomètre d'Alexandrie, du second siècle de notre ère.

Il est à remarquer que les quinze Livres ne contiennent aucune proposition relative à la circonscription des cinq corps réguliers à la sphère.

(*) M. Chasles voudrait qu'on réunît toutes les propositions géométriques qui se rapportent à cette proportion (*Histoire de la Géométrie*, p. 513).

Le célèbre Paccioli Lucas de Borgo, frère mineur (*) de l'ordre des Franciscains, a publié, en italien, un ouvrage spécial sur la proportion continue, sous ce titre : *Divina proportione opera a tutti gli ingegni perspicaci e curiosi necessaria que ciascun studioso di Philosophia, Prospettiva, Pictura, Sculptura, Architectura, Musica, e altre Mathematice, suavissima, sottile, e admirabile doctrina consequira, e delectarssi, con varie questione de secretissima scientia.*

L'ouvrage est imprimé à Venise, en 1509 (**) ; Kästner en donne une description très-détaillée, très-instructive (*Histoire des Mathématiques,* tome I, page 417 ; 1796 ; en allemand). J'ai constaté l'extrême exactitude de cette description sur l'exemplaire qui se trouve à la Bibliothèque impériale sous l'inscription V. 545. Le frère Lucas donne cinq raisons pour justifier l'épithète de *divine* donnée à la proportion : « *La prima e che lei fia una sola e non piu, e non possibile di lei asegnare altre specie ne differentie. La quale unita fia el supremo epitete de epso idio secunda tutta la scola theologica e anche philosophica. La secunda convencentia e dela Sancta Trinita. Cio e si commo in divinis una medesima substantia fia fra tre persone, Padre, Figlio e Spirito Sancto. Cosi una medesima proportione de questa sorte sempre conven se trovi fra tre termini; e mai ne in piu, ne in manco se po retrovare* (page 4) (***). Les trois autres raisons portent aussi le cachet de la profession et du siècle de ce savant moine, d'un esprit très-distingué, et qui comptait Léonard

(*) Les *Cordeliers* prenaient par humilité le nom de *Frères mineurs.*

(**) Il n'existe pas d'édition antérieure ; on en trouve sept exemplaires dans les Bibliothèques publiques de Paris, deux à la Bibliothèque Impériale, deux à l'Arsenal, deux à la Mazarine, un à Sainte-Geneviève. Nous devons ce renseignement au savant prince Balthasar Boncompagni.

(***) Les pages ne sont numérotées qu'au *recto.*

de Vinci parmi ses nombreux amis. C'est même l'illustre artiste qui a dessiné les figures de la *Divina proportione,* où l'on trouve représentés divers polyèdres, l'un de soixante-douze faces, de l'invention de Paciolus, et aussi les formes très-bien exécutées des lettres capitales de l'alphabet latin, et des dessins d'architecture suivant des proportions qui n'ont aucun rapport à la *proportion divine,* comme Montucla dit erronément (*Histoire des Mathématiques,* t. I[er], p. 551). Dans la dédicace à Petro Sederino, gonfalonnier perpétuel à Florence, on lit que Paciolus a présenté un opuscule (*libellum*) de *Divina proportione* à Louis Sforce, duc de Milan, et il ajoute : *Tanto ardore ut schemata quoque sua Vincii nostri Leonardi manibus scalpta. Quod opticen instructiorem reddere possent addiderim.*

On trouve plusieurs emplois ingénieux de la section *continue* dans l'ouvrage suivant : *Euclidis Megarensis* (*), *mathematici clarissimi Elementa, libris XV ad germanam geometriæ intelligentiam e diversis lapsibus temporis injuria contractis restituta. Ad impletis præter majorum spem, quæ hactenus deerant solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus. Accessit decimus sextus liber de solidorum regularium sibi invicem inscriptorum collationibus. Novissime collati sunt, decimus septimus, et decimus octavus priori editioni quodammodo polliciti, de componendorum, inscribendorum et conferendorum compositorum solidorum inventis, ordine et numero absoluti. Authore D. Francisco Flussate Candollo ad Carolum IX, Christianissimum Galliarum Regem. Lutetia Parisiorum, anno* 1602.

La première édition est de Paris, 1566; la seconde de

(*) On a longtemps confondu le géomètre d'Alexandrie avec son homonyme, le philosophe de Mégare.

Lyon, 1578. C'est dans le seizième, dix-septième, dix-huitième Livre que l'auteur traite des solides demi-réguliers et des polyèdres réguliers inscrits les uns dans les autres, et circonscrits les uns aux autres. Il était fils de Gustave de Foix III, comte de Candolle, duc de Randan, de la branche de l'illustre maison de Foix, dont était le célèbre Gaston, d'une bravoure si brillante, et qui fut tué à la bataille de Ravenne en 1512. François, d'abord commandeur des ordres du roi, s'étant ensuite destiné à l'état ecclésiastique, fut nommé, en 1570, évêque d'Aire (Landes). Il est mort à Bordeaux le 4 février 1594, dans sa quatre-vingt-dixième année. Il a fondé, dans cette ville, au collége de Guyenne, une chaire de mathématiques, à donner au concours devant des juges compétents. Chaque candidat était tenu de faire deux lectures pendant deux jours consécutifs : le premier jour, il devait donner une proposition nouvelle de son invention, sans dépasser le onzième Livre d'Euclide; et, le jour suivant, une seconde proposition, aussi de son invention, concernant la théorie des polyèdres, à démontrer par les quinze Livres. En 1703, un des candidats contesta à son concurrent la nouveauté de ses propositions. On convint de s'en rapporter à l'Académie des Sciences, qui consacra deux séances à cet examen, et décida que les propositions n'étaient pas nouvelles (*Histoire de l'Académie;* 1703, page 76). On ne dit pas en quoi consistaient ces propositions. Les archives du collége de Guyenne renferment peut-être des renseignements curieux sur ce mode de concours, qui subsistait encore en 1710. Quoi qu'il en soit, il faut convenir que le noble prélat du XVI[e] siècle avait un amour plus intelligent, un sentiment plus vrai du but de la science, que certains *réglementateurs* de notre siècle *éclairé*.

Note. Dans la séance du samedi 24 mars 1703, l'Académie reçut un Mémoire contenant ces deux théorèmes proposés comme nouveaux par l'un des aspirants à la chaire du collége de Guyenne :

Ad primam sessionem theorema. — *In triangulo æquilatero, perpendicularis ab utrius anguli apice ad basim ducta, potentia est utram libet basis segmentum, est ejusdem triangulis latus est potentiâ ad semidiametrum circuli qui idem triangulam, inscribitur* (*).

Ad secundam sessionem theorema. — *Si in cubo describantur et icosædrum et dodecaëdrum, quadratum ex icosædri uno latere, erit æquale rectangulo ex duobus lateribus quorum unum est latus cubi, aliud latus dodecaedri.*

Un des concurrents prétendait que ces deux propositions n'étaient pas de l'invention du premier aspirant, la première étant prise du livre treize d'Euclide, proposition douze, l'autre du seizième livre, proposition quinze, et que n'ayant pas satisfait à la fondation, il doit être exclu de la chaire disputée.

Dans la séance du samedi suivant, 31 mars 1703, l'Académie a jugé que des deux propositions de l'aspirant, ni l'une ni l'autre ne devait être censée de son invention.

Nous devons ce renseignement à l'illustre doyen des géomètres physiciens, ornement de deux Académies, et qui sonde avec succès les profondeurs du monde planétaire et les mystères de l'univers moléculaire; qui commente les *principes* ardus de Newton, explique les passages obscurs des agronomes de l'antiquité, expose les méthodes bucoliques des Modernes; le tout dans un style si pur, si français, qu'on se croit transporté dans notre grand siècle littéraire. Puisse l'illustre M. Biot, qu'il n'était pas nécessaire de nommer, agréer l'expression de notre reconnaissance. Ayant conservé sous les glaces de l'âge une verdeur juvénile, une activité rare même chez les savants jeunes d'années, il met autant d'empressement à encourager les faibles, que d'autres à décourager les forts.

MÉLANGES.

1. Sous Henri III, il existait à Paris un imprimeur nommé Pierre le Voirrier, qui était imprimeur du *roi*, spécialement pour les mathématiques. C'est ce qu'on voit par l'ouvrage suivant : *Mauricii Bressi Gratianopolitani, Regii et Ramei mathematicarum Lutetiæ professoris, Metrices astronomicæ, libri quatuor. Hæc maximam partem nova et rerum astronomicarum et geographicarum, per plana sphæricaque triangula dimensionis ratio veterique compendio expeditior et compendiosior. Ad*

(*) *Potentia*, carré.

Pomponium Belleureum Sacri Consistorii Consiliarium, Regisque Legatium. Par., 1581, *apud Ægid. Gorbinum.*

A la fin de l'ouvrage on lit : *Excudat Petrus le Voirrier, in* mathematicis *typographus* regius. *Parisiis, anno* 1581, *mense Augusti;* in-folio de 84 pages.

Bressius s'est servi du théorème de Ménélaus, dit de Ptolémée, relatif au triangle coupé par une transversale, pour démontrer plusieurs théorèmes (lib. IV, prop. 13). Ce Livre traite des triangles sphériques; on y trouve des propositions qui ont été communiquées à l'auteur par son ami Jean Saville, Anglais célèbre, fondateur d'une chaire de géométrie, occupée par Newton. Bressius aussi occupait, au Collége de France, une chaire semblable, fondée par le célèbre P. Ramus. Car l'ouvrage se termine ainsi : Hæc ferme sunt, amplissime Belleuræ, *quæ ad rerum astronomicarum dimensionem usui fore duxi. Namque alia problemata quæ curiosæ investigationis potius sunt quam utilis et fructuosæ tanquam a proposito aliena, de industria prætermisi. Quæ quidem commentabor, dum Christianissimi litterarumque amantissimi Gallorum Regis Henrici III et* macaritæ *P. Rami, professoris quondam Regii, munificentia fruerer otio. Viri autem et genere et genio nobilis, divinique Francorum poetæ Petri Ronsardi fruerer hospitio.*

L'épithète *macaritæ,* appliquée à un huguenot égorgé à la Saint-Barthélemy, montre que Bressius était de cette secte, ou bien qu'il trouvait dur de damner l'auteur d'une fondation qui le faisait vivre. Il demeurait chez Ronsard, gentilhomme riche, et très-instruit. On a même reproché à ses vers d'être trop savants; reproche très-fondé, mais qu'on a rarement à faire.

Pompone de Bellièvre, fils d'un premier président au parlement de Grenoble, né en 1529, surintendant des

finances, et mort chancelier en 1607, était un grand protecteur des sciences. Dans ces temps de troubles, lorsqu'on faisait quelques difficultés aux professeurs sur leurs émoluments, ils avaient recours à Bellièvre, et en obtenaient du secours (KASTNER, *Histoire des Mathématiques*, tome I, page 626-796).

2. Les doubles signes $\geqq$ et $\leqq$ sont de Bouguer (*Correspondance mathématique et physique* de quelques célèbres géomètres, etc.; par Fuss, tome I, page 304).

3. Dans le XVIe siècle, on s'est beaucoup occupé de la construction des Tables de sinus. La plupart des calculateurs descendaient par bissections successives de l'arc de 15 degrés à l'arc d'une minute environ. Cet arc de 15 degrés portait le nom singulier de *kardaga*. Ainsi, le premier kardaga était 15; le second kardaga, 30 degrés, et ainsi de suite, jusqu'à 90 degrés, qui était le sixième kardaga. On croit que ce mot est une corruption du mot arabe *kartita*, parvum quid? *Karata* veut dire couple diviseur; ce mot désignerait une partie de la circonférence.

Les Grecs désignaient les trois cent soixantièmes parties par μοῖραι, qui veut dire *parties*; et les Latins aussi se sont servis du mot *partes*. Jamais ils n'ont employé le mot *gradus* pour désigner un *degré* de la circonférence. Ce mot *degré* ne nous vient pas du latin, comme on est porté à le croire, mais il dérive de l'arabe *derug*, où il signifie un échelon, partie d'une échelle, et aussi partie de la circonférence.

Le mot *grade*, pour la centième partie du cadran, date de l'établissement du système métrique. L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* emploie la division décimale du cercle et du jour; division que les astronomes ont abandonnée. Il est bizarre que les astronomes, qui ont tant insisté pour introduire la division décimale dans

les usages de la vie civile, l'aient repoussée de chez eux, où elle est pourtant plus utile que partout ailleurs, puisque toute la science ne consiste qu'en *calculs*.

UN THÉORÈME DE FERMAT;

D'APRÈS M. HERMITE.

(Journal de Mathématiques, tome XIII, page 15; 1848.)

1. *Lemme.* Lorsqu'un nombre premier est de la forme $\dot{4}+1$, il existe un carré qui, augmenté de 1, donne une somme divisible par ce nombre premier.

2. *Lemme.* Le nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ étant converti en fraction continue, on trouve toujours deux réduites consécutives dont les dénominateurs sont, l'un inférieur, et l'autre supérieur à $\sqrt{b}$.

3. THÉORÈME DE FERMAT. *Un nombre premier de la forme $\dot{4}+1$ est toujours la somme de deux carrés.*

Démonstration. Soit p ce nombre premier, on a donc (*lemme* 1)

$$a^2+1=\dot{p};$$

$\frac{a}{p}$ étant converti en fraction continue, on arrive à deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, où $n<\sqrt{p}$ et $n'>p$ (*lemme* 2). Donc, d'après la théorie connue,

$$\frac{a}{p}=\frac{m}{n}+\frac{\varepsilon}{nn'} \quad \text{où} \quad \varepsilon<1;$$

on en déduit

$$na-mp=\varepsilon.\frac{p}{n'},$$

$$(na-mp)^2=p.\frac{p}{n'^2}.\varepsilon^2;$$

$\frac{p}{n'^2}$ et ε^2 sont des fractions; donc

$$(na - mp)^2 < p;$$

mais

$$n^2 < p;$$

donc

$$(na - mp)^2 + n^2 < 2p,$$

ou bien

$$n^2(a^2 + 1) - p(2anm - m^2p) < 2p.$$

$a^2 + 1$ est un multiple de p, l'expression à gauche est donc un multiple de p moindre que $2p$. Donc

$$(na - mp)^2 + n^2 = p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

4. Euler a démontré que la décomposition du nombre premier $p = \dot{4} + 1$ ne peut se faire que d'une seule manière (*voir* tome VII, page 38); et, d'après la formule de Gauss (*voir* tome IX, page 307), lorsqu'un nombre ne peut se décomposer que d'une seule manière en deux carrés, il est premier.

THÉORÈME SUR LA SOMME DE DEUX CARRÉS;
D'APRÈS EULER.

Théorème. *$a^2 + b^2$ n'a aucun diviseur premier de la forme $4n - 1$, à moins que a et b aient un tel diviseur pour facteur commun.*

Démonstration. a et b n'étant pas divisibles par $4n - 1$, il s'ensuit (Fermat) que $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ sera divisible par le nombre premier $4n - 1$; donc $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ ne sera pas divisible par ce nombre premier. Mais $a^2 + b^2$ est un facteur de $a^{4n-2} + b^{4n-2}$; donc, etc. (*Correspondance mathématique et physique,* t. I, p. 116. Lettre à Goldbach, de Berlin, 6 mars 1742).

Dans la même Lettre, on trouve cette simple démonstration du théorème de Fermat.

1. *Lemme.* p étant un nombre premier, on a

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \dot{p}. \tag{1}$$

2. *Lemme.* Si

$$a^p - a = \dot{p},$$

on aura aussi

$$(a+1)^p - (a+1) = \dot{p}.$$

Démonstration. Dans la congruence (1), faisons

$$b = 1,$$

il vient

$$(a+1)^p - a^p - 1 = \dot{p},$$

ou bien

$$(a+1)^p - (a+1) - (a^p - a) = \dot{p};$$

mais, par hypothèse,

$$a^p - a = \dot{p}.$$

Donc, etc.

3. Théorème de Fermat. p étant un nombre premier, on a

$$a^p - a = \dot{p}.$$

Démonstration. On a

$$1^p - 1 = \dot{p};$$

donc, d'après le lemme 2,

$$2^p - 2 = \dot{p}, \quad 3^p - 3 = \dot{p}, \quad \text{etc.}$$

THÉORÈME DE MINIMUM, DANS LE TÉTRAÈDRE, DE M. STEINER.

1. *Lemme.* a est un point fixe, D une droite sur laquelle on prend deux points b, c; la distance bc est

constante; le périmètre du triangle abc est un minimum lorsque $ab = ac$, ou, ce qui revient au même, lorsque le milieu de bc est le pied de la perpendiculaire abaissée de a sur bc.

2. Théorème. *Sur la droite* A *sont situés deux points fixes a, b; sur la droite* B, *on prend deux points c, d; la distance cd est constante; l'aire de la pyramide abcd est un minimum lorsque le milieu de cd est le point où la plus courte distance entre* A *et* B *rencontre* B. (Steiner.)

Démonstration. acd, bcd, cab, dab sont les quatre faces de la pyramide. Les aires acd, bcd sont constantes; il s'agit donc de chercher en quel cas la somme des aires cab et dab est un minimum, ou dans quel cas la somme des perpendiculaires abaissées de c et d sur A devient un minimum. A cet effet, par un point quelconque e pris sur A, menons un plan perpendiculaire sur A, et projetons sur ce plan les points c, d en c', d'; la distance $c'd'$ est constante; et les droites ec', ed' sont évidemment égales aux perpendiculaires abaissées de c et d sur A. Or, d'après le lemme, $ec' + ed'$ est un minimum lorsque le milieu e' de $c'd'$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de e sur $c'd'$; alors ee' est la projection de la plus courte distance; donc, etc.

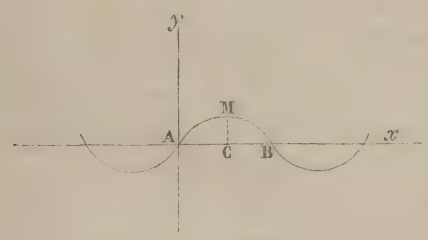
3. *Corollaire.* Prenant sur deux droites deux longueurs constantes, et considérant ces longueurs comme les arêtes opposées d'un tétraèdre, le volume du tétraèdre est constant et son aire est un minimum, lorsque la plus courte distance des deux droites partage les deux longueurs en parties égales, et le rayon de la sphère inscrite est un maximum.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉES 1842 ET 1848 (*);

Par M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

1848. — Composition d'analyse.

Parmi toutes les courbes planes de même longueur l, qui se terminent à deux points donnés A, B, *déterminer celle qui a le plus grand moment d'inertie par rapport à* AB. *Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe et la droite* AB, *ainsi que l'aire de la surface qui serait engendrée par la courbe si elle tournait autour de cette droite en faisant une révolution complète.*



AB étant prise pour axe des x, et la perpendiculaire en A pour axe des y, le moment d'inertie dont il s'agit est représenté par $\int_0^l y^2 ds$, et, d'après les principes du

(*) La même courbe répond au problème de mécanique de 1842 et au problème d'analyse de 1848; c'est pour cela que nous les avons réunis.

calcul des variations, la courbe demandée doit être déterminée au moyen de l'équation

$$\delta.\int_0^l (y^2 - \lambda)\, ds = 0,$$

λ étant une constante qui dépend de la longueur donnée l.

En intervertissant l'ordre des opérations indiquées par les signes δ et $\int$, et faisant, pour plus de facilité, varier x et y, on déduit de cette équation

$$\int_0^l \left\{ \delta y \left[2y + \mathrm{D}_s.(\lambda - y^2)\frac{dy}{ds} \right] + \delta x.\mathrm{D}_s.(\lambda - y^2)\frac{dx}{ds} \right\} ds = 0,$$

attendu que δx et δy sont nulles aux limites.

Suivant les principes auxquels nous venons de renvoyer, on a une équation différentielle de la courbe demandée, en posant

$$\mathrm{D}_s.(\lambda - y^2)\frac{dx}{ds} = 0.$$

On peut égaler à zéro soit le coefficient de δx, soit celui de δy, car les deux équations ainsi formées rentrent l'une dans l'autre; il faut choisir la moins compliquée.

Une première intégration donne

$$c\frac{ds}{dx} = \lambda - y^2,$$

c étant une constante arbitraire; et l'on tire facilement de cette équation

$$(1) \qquad c\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(\lambda - y^2)^2 - c^2}.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer :

1°. Qu'à cause du double signe dont le radical est af-

fecté, et de ce que la quantité sous le radical ne contient que c^2, il suffit de supposer $c > 0$;

2°. Que λ^2 doit surpasser c^2 pour que de très-petites valeurs de y ne rendent pas $\frac{dy}{dx}$ imaginaire;

3°. Que λ ne peut être négative, parce que, dx étant positive quand x croît de zéro à AB et y^2 étant nécessairement croissant à partir de zéro, si λ était négative, le radical croîtrait toujours et dy ne changerait pas de signe, attendu qu'il n'y aurait aucune raison pour passer d'un signe à l'autre devant le radical; de sorte que y ne pourrait devenir nulle pour $x = AB$, tandis qu'il faut au contraire que cela ait lieu.

Il résulte de ces remarques que la valeur $\sqrt{\lambda - c}$ est un maximum de y qui ne peut la dépasser en croissant à partir de zéro, sans que $\frac{dy}{dx}$ ne devienne imaginaire. On posera, par conséquent,

(2) $$y = \sqrt{\lambda - c} \,.\, \sin\varphi.$$

En substituant cette expression à y dans l'équation (1), on obtient

$$dx = \frac{c}{\sqrt{\lambda + c}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda - c}{\lambda + c}\sin^2\varphi}},$$

si l'on regarde φ comme croissant à partir de zéro, et si l'on convient de passer du $+$ au $-$ devant le radical de l'équation (1) lorsque y passe par sa valeur maximum qui répond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Puis on a

(3) $$x = \frac{c}{\sqrt{\lambda + c}} \,.\, \mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}, \varphi\right),$$

F étant la caractéristique de la fonction elliptique de première espèce.

D'après la valeur précédente de dx, l'équation

$$ds = \frac{\lambda - y^2}{c} dx$$

devient

$$ds = \sqrt{\lambda + c} . d\varphi . \sqrt{1 - \frac{\lambda - c}{\lambda + c} \sin^2 \varphi} - dx,$$

et l'on a

$$s = \sqrt{\lambda + c} . \mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}, \varphi\right) - x,$$

E étant la caractéristique de la fonction elliptique de seconde espèce; ainsi la rectification de la courbe cherchée se ramène à celle de l'ellipse dont les demi-axes sont $\sqrt{\lambda + c}$ et $\sqrt{2c}$.

y devient nulle pour $\varphi = \pi$; donc on doit avoir

$$\frac{2c}{\sqrt{\lambda + c}} . \mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right) = \mathrm{AB},$$

et

$$2\sqrt{\lambda + c} . \mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right) = l - \mathrm{AB},$$

ce qui détermine λ et c (*).

Les valeurs de y et de dx donnent

$$y\,dx = \frac{c \sin \varphi\, d\varphi}{\sqrt{\frac{\lambda + c}{\lambda - c} - \sin^2 \varphi}},$$

et en intégrant cette expression depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, on trouve, pour l'aire de la portion de plan com-

(*) On emploie encore ici les notations de Legendre; les fonctions F et E ont, comme on sait, pour $\varphi = \pi$, des valeurs doubles de celles qu'elles ont pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et ces dernières sont exprimées par $\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right)$, $\mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right)$ pour le module $\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}$.

prise entre la courbe et AB,

$$c\left[\log\left(\sqrt{\lambda+c}+\sqrt{\lambda-c}\right)^2-\log 2c\right].$$

La différentielle de l'aire de la surface engendrée par la courbe tournant autour de AB est $2\pi y\,ds$; or les valeurs de y et de ds en fonction de φ donnent

$$2\pi y\,ds = 2\pi(\lambda-c)\frac{\dfrac{c}{\lambda-c}+\cos^2\varphi}{\sqrt{\dfrac{2c}{\lambda-c}+\cos^2\varphi}}\cdot\sin\varphi\,d\varphi;$$

et, en intégrant entre les limites qui viennent d'être indiquées, on a

$$2\pi\sqrt{\lambda^2-c^2},$$

pour l'aire de la surface de révolution dont il s'agit.

Enfin, on a encore

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\sqrt{\lambda-c}}{c^2}\left[\lambda-(\lambda-c)\sin^2\varphi\right]\sin\varphi.$$

Rien n'est plus facile que de se faire, d'après les expressions de x, y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de la variable auxiliaire φ, une idée exacte, tant de l'arc limité à A et B qui répond à la question, que de toute la courbe qui satisfait à l'équation (1). En effet :

1°. φ croissant de 0 à π, x croît de 0 à AB, y croît d'abord de 0 à $\sqrt{\lambda-c}$ $\left(\text{maximum qui répond à } x=\frac{AB}{2}\right)$, puis décroît jusqu'à 0, $\frac{dy}{dx}$ décroît de $\frac{\sqrt{\lambda^2-c^2}}{c}$ à $-\frac{\sqrt{\lambda^2-c}}{c}$, en passant par zéro quand $x=\frac{AB}{2}$, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ reste constamment négative;

2°. y a la même valeur et $\frac{dy}{dx}$ des valeurs de signes contraires pour des valeurs de φ équidifférentes de $\frac{\pi}{2}$ auxquelles répondent des valeurs de x équidifférentes de $\frac{AB}{2}$.

3°. Enfin $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_1 + k\pi$, φ_1 étant entre zéro et π, et k un nombre entier positif ou négatif, donnent des valeurs de x qui diffèrent entre elles de $k\pi$, et des valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui sont égales et de même signe, ou égales et de signes contraires suivant que k est pair ou impair.

Donc :

L'arc AMB *est concave vers sa corde* AB, *et formé de deux parties symétriques par rapport à l'ordonnée* CM *de son milieu* M.

La courbe est composée d'une infinité de parties égales à AMB, *situées les unes du côté des y positives, les autres du côté des y négatives, comme une sinusoïde, et les points tels que* A, B, *etc., sont en même temps des centres et des points d'inflexion.*

1842. — Composition de mécanique.

Démontrer qu'un fil flexible homogène et sans masse peut tourner autour de la droite qui joint ses extrémités fixes, en conservant une figure permanente, et déterminer cette figure; on fait abstraction de la résistance de l'air et des frottements.

Soient A, B les extrémités fixes du fil; s'il tournait effectivement autour de AB, en conservant une figure constante AMB, ses points décriraient des circonférences dont AB serait l'axe commun, et ils auraient tous, au même instant, la même vitesse angulaire, qui ne varie-

rait pas, d'ailleurs, avec le temps, puisqu'il n'y a pas de forces appliquées. Or, chaque sommet du polygone infinitésimal qu'il est permis de substituer à la courbe dans le raisonnement, peut être considéré comme un point libre, si on lui applique à chaque instant une force égale à la résultante des tensions des côtés contigus; et cette force ne diffère pas de la force centripète due au mouvement circulaire uniforme du sommet autour de AB; de sorte que sa direction, qui est comprise dans le plan osculateur, coupe cette droite. Donc le deuxième élément de la courbe, à partir de A, est dans le plan du premier et de AB; le troisième dans le plan du deuxième et de AB; et ainsi de suite. Ainsi, *la figure* AMB *est plane*, en admettant qu'elle existe.

Si l'on désigne par T la tension du fil au point (x, y), par s la longueur de la partie qui est entre ce point et l'extrémité A, enfin par ω la vitesse angulaire constante de tous les points autour de AB; et si l'on prend pour axe des x la droite AB, et pour axe des y la perpendiculaire élevée en A à cette droite dans le plan mobile AMB; les composantes, suivant les axes de la force qu'il suffirait d'appliquer à (x, y) pour pouvoir considérer ce point comme libre, sont représentées par $D_s . T \frac{dx}{ds}$, $D_s . T \frac{dy}{ds}$, et celles de la force centripète par 0, $-\omega^2 y$. Si la courbe AMB existait, on aurait donc, d'après ce qui précède, les deux équations

$$D_s . T \frac{dx}{ds} = 0, \quad D_s . T \frac{dy}{ds} + \omega^2 y = 0;$$

et, réciproquement, le théorème énoncé sera démontré si l'on peut avoir une courbe qui satisfasse à l'équation déduite de celles-ci par l'élimination de T, et qui passe en A, B.

De la première de ces deux équations on déduit immédiatement

$$(1)\qquad T = c_1 \frac{ds}{dx},$$

c_1 désignant une constante arbitraire.

En effectuant les dérivations qui ne sont qu'indiquées, multipliant ensuite par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ respectivement, puis ajoutant, on a

$$\frac{dT}{ds} + \omega^2 y \frac{dy}{ds} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(2)\qquad T = c_2 - \frac{\omega^2}{2} y^2,$$

en désignant par c_2 une seconde constante arbitraire.

Enfin, par l'élimination de T entre les équations (1) et (2), il vient

$$c \frac{ds}{dx} = \lambda - y^2,$$

si l'on remplace c_1 par $c\frac{\omega^2}{2}$, et c_2 par $\lambda\frac{\omega^2}{2}$.

Or cette équation est identique à la première des équations différentielles qu'on a eues pour la courbe du problème précédent; donc le théorème dont il s'agit maintenant est démontré, ainsi que cela a été annoncé plus haut, puisque non-seulement on peut faire passer la courbe par les points A, B, mais encore l'astreindre à une autre condition quelconque.

Il convient de remarquer qu'il peut y avoir de A à B deux, ou même un nombre quelconque d'arcs tels que AMB.

NOTE SUR LA THÉORIE DES FOYERS;

PAR M. EDMOND LAGUERRE-VERLY,
Élève (institution Barbet).

I.

1. Considérons trois coniques ayant un même foyer F, et sur une droite arbitraire FZ passant par ce foyer, prenons trois points A, B et C, correspondant respectivement aux trois coniques. Menons par chacun de ces points deux tangentes à la conique correspondante, et joignons les six points de contact au foyer : nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant pour bissectrice commune la ligne FZ; donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant par l'homographie cette propriété, nous obtiendrons le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* O, *et que, sur une droite* OZ *passant par ce point, on prenne trois points* A, B, C *correspondant aux trois coniques; si, par chacun de ces points, on mène des tangentes à la conique correspondante, en joignant les six points de contact ainsi obtenus au point* O, *on obtiendra un faisceau en involution.*

Remarque. Si les trois coniques se réduisent à une seule, on retombe sur la proposition suivante, due à M. Chasles :

Si trois cordes d'une conique se coupent en un même point, les six points qu'elles interceptent sur la conique sont en involution; c'est-à-dire qu'en joignant ces six points à un point quelconque de la conique, on a un faisceau en involution.

Si les trois points A, B et C se confondent, on obtient le théorème énoncé tome XI, page 292.

J'indiquerai encore les deux théorèmes suivants :

Théorème II. *Si une conique variable est assujettie à rester tangente à deux droites fixes* A *et* B, *le lieu des pôles d'une droite* D *passant par le point de rencontre de* A *et de* B *par rapport à cette conique variable, est une droite* H *passant par ce même point de rencontre. Les quatre droites* D, A, H, B *forment un faisceau harmonique.*

Théorème III. *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, les deux tangentes menées à une même conique couperont la polaire du sommet de l'angle, relativement à cette conique, en deux points; et si l'on joint au sommet de l'angle les six points de rencontre ainsi obtenus, on aura un faisceau en involution.*

2. *Coniques biconfocales.* Une conique ayant deux foyers fixes peut être considérée comme tangente à quatre droites fixes; les théorèmes relatifs aux coniques biconfocales peuvent donc être étendus aux coniques inscrites dans un même quadrilatère. Je citerai quelques exemples de cette transformation.

Soient trois coniques biconfocales; par un point extérieur menons-leur six tangentes. Ces tangentes auront deux à deux la même bissectrice; donc elles formeront un faisceau en involution. En généralisant par homographie, on obtiendra la proposition suivante, corrélative d'un théorème de M. Sturm :

Si trois coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, ces six tangentes formeront un faisceau en involution.

Le problème suivant : *Construire une conique inscrite dans un quadrilatère et passant par un point donné* A, a en général deux solutions.

Si au point A on mène les deux tangentes aux deux coniques satisfaisant à la question, et qu'on joigne ce point à deux sommets opposés du quadrilatère, on obtiendra un faisceau harmonique.

3. Considérons n coniques situées dans un même plan, les $4n$ foyers de ces coniques seront $4n$ sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces courbes, et les côtés opposés de ces quadrilatères convergeront tous vers deux mêmes points P et Q situés sur la *droite de l'infini* (*).

Observation. Chaque côté renferme un foyer réel et un foyer imaginaire.

Il suit de là que :

Si l'on transforme homographiquement n coniques situées dans un même plan, aux foyers de ces coniques correspondront les sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces coniques transformées, et les côtés opposés de ces quadrilatères se couperont en deux mêmes points P *et* Q *situés sur la droite, répondant homographiquement à celle de l'infini.*

Inversement, cette remarque peut servir à résoudre ce problème :

Deux points A *et* B *étant pris dans le plan d'une conique, transformer la figure homographiquement, en sorte que les points correspondant à* A *et* B *soient des foyers de la conique transformée.*

On peut remarquer, de plus, que si un cercle se trouve dans le plan des coniques données, il se transforme suivant une conique passant par les deux points fixes P et Q.

(*) Expression employée par M. Poncelet.

Comme application de ce principe, considérons trois coniques inscrites dans un même angle ; si nous joignons le sommet de cet angle aux douze foyers de ces coniques, nous obtiendrons ainsi six couples de droites ayant une bissectrice commune ; donc trois quelconques d'entre elles forment un faisceau en involution.

On tire de là le théorème suivant :

Théorème IV. *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle* A, *et que par deux points extérieurs* P *et* Q *on leur mène des tangentes, les tangentes menées de ces deux points à une même conique formeront un quadrilatère donnant deux couples de sommets opposés, et nous aurons, en considérant les trois coniques, six couples de sommets ; en joignant trois quelconques de ces couples au sommet* A, *on obtiendra un faisceau en involution.*

II.

Les deux droites représentées par les équations

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0$$

et

$$(y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$

que nous avons considérées dans l'étude des foyers des coniques (t. XI, p. 290), jouissent d'une propriété très-remarquable, contenue dans la proposition suivante :

Si un angle constant tourne autour du point (α, β), *ses côtés et les droites représentées par les équations*

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$
$$(y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$

forment dans chaque position de l'angle mobile un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. Si l'angle mobile est droit, le faisceau est harmonique.

Les conséquences de ce principe sont nombreuses. Considérons un angle constant tournant autour du foyer d'une conique, les cordes interceptées dans la conique enveloppent deux coniques confocales et doublement tangentes à la première.

On tire de cette proposition le théorème suivant :

Théorème V. *Si un angle* O *est circonscrit à une conique, et qu'un angle variable tourne autour du point* O *de manière que ses côtés fassent dans chacune de ses positions, avec les côtés de l'angle fixe, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques inscrites dans l'angle* O *et doublement tangentes à la première.* (Chasles, *Géométrie supérieure*, page 448.)

Je citerai encore les théorèmes suivants :

Théorème VI. *Si un angle variable tourne autour d'un point fixe* O *pris dans le plan d'une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau harmonique, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques.*

Si le point O est sur la conique, la corde interceptée passe par un point fixe.

Théorème VII. *Si un angle variable tourne autour d'un point pris sur une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, la corde interceptée dans la conique par l'angle variable enveloppe une autre conique doublement tangente à la première au point* O. (Chasles, *Géométrie supérieure*, page 450) (*).

(*) Ces théorèmes m'ont été communiqués avant la publication de la *Géométrie supérieure*.

Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un théorème particulier pour nous élever au théorème général; mais il arrive souvent que ce dernier est plus simple et plus facile à démontrer; alors on peut en tirer le théorème particulier.

On verra un exemple de cette méthode dans ce qui va suivre.

III.

Définition. Soit un point α, β pris dans le plan d'une conique, les droites représentées par

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0, \quad (y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0$$

couperont la conique en quatre points donnant deux cordes réelles. Quoique les théorèmes suivants s'appliquent aussi aux cordes imaginaires, nous ne considérerons que les premières; pour abréger, je les nommerai les *droites directrices* du point α, β. Soient $X=0$ et $Y=0$ les équations de ces deux droites, l'équation de la conique pourra se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda XY;$$

donc :

Théorème VIII. *Le carré de la distance d'un point de la conique à un point fixe α, β est au produit des distances de ce même point aux deux droites directrices correspondantes, dans un rapport constant.*

Remarque. Si le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique, les deux droites directrices se confondent toutes deux avec la directrice correspondante.

Si la conique est un cercle, une des droites directrices est toujours à l'infini.

Considérons une conique dans un plan, et soient A, A′, B, B′ quatre points pris arbitrairement sur cette conique; menons la droite AA′ et joignons un point quel-

conque de la conique aux quatre points A, A', B, B'; nous obtiendrons ainsi quatre droites coupant la corde AA' aux quatre points A, A', b, b', et si nous joignons ces quatre points à un point fixe O pris dans le plan, les quatre droites AO, A'O, bO, b'O forment un faisceau dont le rapport anharmonique sera constant.

Maintenant, si nous transformons homographiquement cette figure, en sorte que les deux droites OA et OA' se projettent suivant les droites dont les équations sont

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,\quad (y-\beta)-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$

α et β étant les coordonnées du point correspondant au point O, on obtiendra le théorème suivant :

THÉORÈME IX. *Soient* F *un point fixe pris dans le plan d'une conique,* A *et* A' *deux points pris sur cette conique; un angle dont les côtés passent constamment par les points* A *et* A', *et dont le sommet se meut sur la conique, intercepte sur une des droites directrices correspondant au point* F *un segment vu de ce point sous un angle constant.*

Remarque. Ce théorème a encore lieu quand le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique; je ferai remarquer que, dans ce cas, l'angle constant est la moitié de l'angle AFA'.

Si les points A, A' et le pôle de la droite directrice que l'on considère sont en ligne droite, l'angle constant est droit.

Parmi les applications que l'on peut faire du théorème précédent, je citerai la suivante :

Trois segments étant donnés sur une droite, déterminer le point du plan d'où ces trois segments sont vus sous le même angle.

Ce problème peut se résoudre au moyen de la règle et du compas.

4. PROBLÈME. *Un système d'angles* A, B, C, etc., *situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque* F (A, B, C,...) = o, *trouver la relation qui lie les angles correspondants* A′, B′, C′, etc., *quand on transforme la figure homographiquement.*

Solution. Soient P, Q les deux points correspondant, sur la seconde figure, aux deux points qui, dans la première figure, sont situés respectivement sur la droite de l'infini et sur les deux droites $y = xi$, $y = -xi$.

Les deux côtés de l'angle A′ dans la seconde figure et les droites A′P, A′Q formeront un faisceau dont nous désignerons le rapport anharmonique par a; désignons de même par b, c, d, etc., les rapports correspondant aux autres angles, la relation cherchée est

$$(1) \qquad F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \quad \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \quad \frac{\log c}{2\sqrt{-1}} \cdots\right) = 0,$$

la caractéristique log désignant des logarithmes népériens.

N. B. M. Chasles, dans sa *Géométrie supérieure*, page 446, § 623, ne donne la solution de ce problème que quand les angles A, B, C, etc., ont même sommet ou quand ils sont égaux.

On pourrait se proposer la même question pour un système d'angles situés d'une manière quelconque dans l'espace; mais la question est alors plus complexe et demande quelques développements que nous ne pouvons donner ici.

Remarque. Il suit de là que toute relation entre des angles est projective; pour ne donner qu'un exemple, nous prendrons ce théorème élémentaire :

La somme des angles d'un polygone plan est un multiple de deux droits.

Si on le transforme homographiquement au moyen du

problème précédent, on trouvera le théorème de Carnot relatif aux segments qu'une transversale intercepte sur les côtés d'un polygone.

Je ne m'arrêterai pas sur les conséquences que l'on en peut tirer pour les polygones inscrits ou circonscrits aux coniques, et notamment aux théorèmes que M. Poncelet a donnés à ce sujet dans ses *Propriétés projectives*.

Nous donnerons prochainement les démonstrations de ces diverses propositions et du théorème suivant :

5. Théorème X. (Nous appelons ici *foyers d'une surface de révolution du second ordre* les deux foyers communs à toutes les sections faites suivant l'axe.) — *Le lieu des foyers des surfaces de révolution circonscrites à une surface du second ordre est un système de trois coniques situées dans les trois plans principaux de la surface* (*).

On déduit comme corollaire le théorème de M. Steiner sur les sommets des cônes de révolution circonscrits à un ellipsoïde.

6. Théorème XI. *Soit un cône circonscrit à une surface du second ordre; tout plan cyclique du cône coupera la surface suivant une conique dont le sommet du cône sera un foyer.*

Nous joignons ici un exemple pour éclaircir la formule (1) (p. 64).

7. Soient un cercle et deux points A et B pris arbitrairement sur ce cercle, M un point quelconque de la circonférence, et O son centre; on aura

$$2.\widehat{AMB} = \widehat{AOB}.$$

Si nous transformons la figure homographiquement, le cercle se projettera suivant une conique, le point O se projette en O', et, comme il est facile de le voir, les points P

(*) Ce sont les courbes *polaires* de M. Chasles.

et Q seront les points de contact des tangentes menées à cette conique par le point O′; A et B se projetteront en A′ et B′. Cela posé, joignons les points A′ et B′ au point O′, et appelons a le rapport anharmonique du faisceau O′P, O′A′, O′B′, O′Q (en regardant les droites OP et OQ comme conjuguées).

Joignons les quatre points A′, B′, P, Q à un point quelconque M de la conique, et appelons b le rapport anharmonique du faisceau MA′, MP, MB′, MQ (en regardant les droites MP et MQ comme conjuguées); d'après la formule (1), nous devons avoir

$$2\left(\frac{\log b}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{\log a}{2\sqrt{-1}},$$

ou

$$2\log b = \log a,$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$b^2 = a;$$

d'où le théorème suivant :

Si quatre points conjugués deux à deux sont sur une conique, le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus du pôle de la droite qui joint deux points conjugués est égal au carré du rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces quatre points sont vus d'un point quelconque de la conique.

NOTES RECTIFICATIVES SUR LE THÉORÈME DE M. STAUDT, ET SUR LE THÉORÈME DE GUDERMANN. EXERCICE DE CALCUL.

1. Staudt, tome XI, page 299. Le lemme § I (21) s'applique à un quadrilatère quelconque, et la formule est

$$(AD)^2 + (BC)^2 - (AC)^2 - (BD)^2.$$

On a mis, par erreur typographique, AB au lieu de AD.

Au § X on lit : *La comparaison de toutes les faces deux à deux donne cinquante-quatre termes analogues.* Il faut lire *quatre-vingt-seize termes,* car 3.4.4 = 48. On dit avec justesse au § XII que, dans le cas général, le nombre des termes positifs, ainsi que le nombre de termes négatifs, est $3mn$, et pour deux tétraèdres, $m=n=4$.

Nous devons cette correction à l'obligeance de M. Cornelius Keogh, savant Irlandais habitant Bordeaux.

2. Gudermann, tome XI, page 410. Après la formule

$$x = \log \sqrt{\frac{1+\tang x}{1-\tang x}},$$

il faut ajouter que $\tang x$ étant moindre que l'unité, on peut faire $\tang x = \sin z$, et alors

$$x = \log \sqrt{\frac{1+\sin z}{1-\sin z}}.$$

C'est ce que M. Gudermann note par $\mathfrak{L}(z)$; et, dès lors, il faut changer partout $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ en $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}$.

Cette observation est de M. Lebesgue, ainsi que la suivante.

3. *Exercice de calcul,* tome XI, page 448. Les deux équations

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy = 1,$$
$$P_1 x'^2 + P_2 y'^2 + P_3 z'^2 + 2Q_1 y'z' + 2Q_2 x'z' + 2Q_3 x'y' = 1,$$

représentent la même surface rapportée à deux systèmes d'axes rectangulaires. En prenant pour chacune l'équation aux axes principaux, comme les deux surfaces sont les mêmes, on a immédiatement les trois relations demandées.

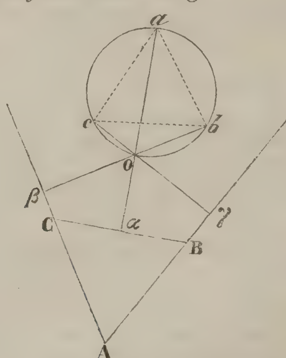
THÉORÈME SUR LE MOUVEMENT D'UN TRIANGLE DANS UN PLAN;

PAR M. SERRET (PAUL),
Professeur.

THÉORÈME. *Soient* a, b, c *les trois côtés d'un triangle* ABC *qui se meut d'une manière quelconque dans son plan, mais sans varier de forme ni de grandeur; à une époque quelconque du mouvement, soient* $f_{(a)}, f_{(b)}, f_{(c)}$ *les rayons de courbure des courbes enveloppées par les trois côtés* a, b, c, *respectivement aux points où ces côtés les touchent actuellement; on aura la relation*

$$a.f_{(a)} + b.f_{(b)} + c.f_{(c)} = \text{constante} = 2\,S,$$

S *désignant la surface du triangle.*



Lemme. Si les deux premiers côtés AB, AC d'un triangle donné sont constamment tangents respectivement à deux cercles donnés dont les centres sont c, b, le troisième côté BC enveloppera un troisième cercle ayant son centre en o. (BOBILIER.)

Soient, en effet, β, γ les points actuels de contact des côtés AC, AB sur leurs cercles respectifs, et soit o l'intersection des deux rayons $b\beta$, $c\gamma$, perpendiculaires aux cô-

tés AC, AB; le point o sera, d'après un théorème connu, le centre instantané de rotation pour la position actuelle de la figure; et si l'on abaisse $o\alpha$ perpendiculaire sur CB, le point α sera le point où BC touche son enveloppe. Pour démontrer que cette enveloppe est un cercle, il me suffira de prouver que la normale $o\alpha$ va passer par un point fixe, et c'est ce qu'il est facile de voir; car, sur la ligne fixe bc, décrivons un segment capable de l'angle $180° - A$, et soit a le point où la droite $o\alpha$ va couper cette circonférence, qui demeure invariable dans le mouvement du triangle; nous aurons

$$\text{angle } Co\alpha = \widehat{B}, \quad bo\alpha = \widehat{C}.$$

Donc le point a divise l'arc de cercle constant cab dans un rapport constant; donc le point a est fixe.

Par conséquent, toutes les *normales* à la courbe enveloppe du côté libre BC vont concourir en un point fixe a; donc cette courbe enveloppe est un cercle ayant le point a pour centre.

Remarque. Bobilier arrive à la même conclusion autrement et d'une manière très-élégante (*voyez* sa *Géométrie*, page 297), en prouvant que la distance $a\alpha$ reste constante; mais il ne va pas plus loin, et ne cherche pas la relation qui peut exister entre les trois rayons.

Cherchons maintenant une relation entre a, b, c et $f_{(a)}, f_{(b)}, f_{(c)}$.

Pour cela, l'aire du triangle ABC étant la différence entre la somme des aires des triangles oAC, oAB, et celle du triangle oBC, on a

$$(1) \qquad b.o\beta + c.o\gamma - a.o\alpha = 2S.$$

En outre, le quadrilatère inscrit $ocab$ nous donne, en vertu du théorème de Ptolémée,

$$(2) \qquad ob.ac + oc.ab - oa.bc = 0.$$

Mais, le triangle *abc* étant semblable au triangle ABC à cause de l'égalité des angles, on peut remplacer dans (2) les lignes *ac*, *ab*, *bc* par leurs proportionnelles AC, AB, BC, ou *b*, *c*, *a*; donc on aura, à la place de (2),

$$(2') \qquad b.ob + c.oc - a.oa = 0.$$

Ajoutant (1) et (2') membre à membre, il vient

$$b.b\beta + c.c\gamma - a.a\alpha = 2S;$$

ou bien, en prenant convenablement les signes,

$$a.f_{(a)} + b.f_{(b)} + c.f_{(c)} = 2S. \qquad \text{C. Q. F. D. (*)}$$

SOLUTION DES QUESTIONS 258 ET 259

(voir t. XI, p. 358);

PAR M. GARLIN,

Ancien élève de l'École Normale, professeur au lycée de Lyon.

1. Étant données deux surfaces du second ordre, concentriques et de mêmes axes, qui s'entrecoupent, trouver l'aire du cône ayant le centre pour sommet et la courbe de l'intersection pour base.

2. Exprimer, par des intégrales abéliennes, la longueur d'un arc de la courbe de l'intersection. (STREBOR.)

Soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

(*) Le théorème subsiste pour un polygone plan quelconque, en considérant chaque côté comme représentant une force, en grandeur et en direction, et appliquant le théorème des moments. TM.

les équations des deux surfaces. Si on les retranche l'une de l'autre, on obtient

$$(3)\qquad x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a'^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b'^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c'^2}\right)=0;$$

équation d'un cône ayant pour sommet le centre commun des deux surfaces, et pour base la courbe de leur intersection. Pour rectifier cette dernière courbe et pour obtenir l'aire du cône, nous prendrons pour variable la longueur u de la génératrice de ce cône, en sorte que

$$(4)\qquad u^2=x^2+y^2+z^2.$$

Nous supposerons que les deux surfaces soient des ellipsoïdes, rien n'étant plus aisé que de voir les modifications à introduire quand une de ces surfaces ou toutes les deux deviennent des hyperboloïdes.

Si entre les équations (1) et (2) on élimine successivement x^2, y^2 et z^2, on trouve, pour les projections de la base du cône sur les plans coordonnés,

$$(5)\qquad y^2\frac{a^2b'^2-b^2a'^2}{b^2b'^2}+z^2\frac{a^2c'^2-c^2a'^2}{c^2c'^2}=a^2-a'^2,$$

$$(6)\qquad x^2\frac{b^2a'^2-a^2b'^2}{a^2a'^2}+z^2\frac{b^2c'^2-c^2b'^2}{c^2c'^2}=b^2-b'^2,$$

$$(7)\qquad x^2\frac{c^2a'^2-a^2c'^2}{a^2a'^2}+y^2\frac{c^2b'^2-b^2c'^2}{b^2b'^2}=c^2-c'^2.$$

On peut remarquer que ces équations représentent des cylindres dont les génératrices sont parallèles aux axes coordonnés. Par conséquent, les questions proposées reviennent à trouver la longueur de l'arc de courbe résultant de l'intersection de ces cylindres, et l'aire du cône ayant cette courbe pour base et l'origine des coordonnées pour sommet.

Les coordonnées des points d'intersection de la base du cône avec les plans coordonnés sont données par les équations suivantes :

$$(8)\quad \begin{cases} y = 0, \\ x^2 = \dfrac{a^2 a'^2 (c^2 - c'^2)}{c^2 a'^2 - a^2 c'^2}, \\ z^2 = \dfrac{c^2 c'^2 (a'^2 - a^2)}{c^2 a'^2 - a^2 c'^2}; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = \dfrac{b^2 b'^2 (c^2 - c'^2)}{c^2 b'^2 - b^2 c'^2}, \\ z^2 = \dfrac{c^2 c'^2 (b'^2 - b^2)}{c^2 b'^2 - b^2 c'^2}; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 = \dfrac{a^2 a'^2 (b^2 - b'^2)}{b^2 a'^2 - a^2 b'^2}, \\ y^2 = \dfrac{b^2 b'^2 (a'^2 - a^2)}{b^2 a'^2 - a^2 b'^2}. \end{cases}$$

Pour que les valeurs (8) soient réelles, il faut et il suffit qu'on ait

$$c > c' \quad \text{et} \quad a' > a;$$

car alors on a

$$ca' > ac',$$

et, par conséquent, le dénominateur est toujours positif.

D'après ces deux inégalités, la réalité des valeurs (9) n'entraîne que la nouvelle condition $b' > b$.

Dès lors, il est facile de voir que les valeurs (10) sont toujours imaginaires. En effet, d'après les conditions ci-dessus, on peut avoir indifféremment

$$ba' > ab' \quad \text{ou} \quad ba' < ab'.$$

Or, si $ba' > ab'$, comme $b < b'$, la valeur de x est imaginaire. Si, au contraire, $ba' < ab'$, comme $a' > a$, c'est y qui est imaginaire. Donc, pour que les deux surfaces du second ordre se rencontrent, il faut et il suffit que leurs axes satisfassent aux inégalités

$$a < a', \quad b < b', \quad c > c'.$$

D'après la discussion précédente, on reconnaît que la

base du cône est symétrique par rapport aux deux plans principaux passant par l'axe des z ; cette courbe à double courbure a quatre sommets qui sont les points où elle rencontre les plans XZ et YZ. Cette courbe se compose ainsi de quatre branches identiques, et, par conséquent, pour les questions que nous avons à résoudre, il suffit de considérer une de ces quatre branches et de quadrupler ensuite.

En cherchant par la méthode ordinaire le maximum et le minimum de la valeur de u donnée par l'équation (4), en se rappelant que les variables x, y, z sont liées par les équations (1) et (2), on trouve que les valeurs maxima et minima correspondent aux rayons vecteurs des deux sommets d'une de ces branches. Ces valeurs, commodes à calculer, sont précisément les limites des intégrales que nous allons chercher maintenant.

Occupons-nous d'abord de la rectification de la base du cône. Les équations (1), (2) et (4) donnent les valeurs suivantes de x^2, y^2, z^2 en fonction de u,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}}{\delta}, \\ y^2 &= \frac{\mathrm{C}u^2+\mathrm{D}}{\delta}, \\ z^2 &= \frac{\mathrm{E}u^2+\mathrm{F}}{\delta}; \end{aligned}\right.$$

et on a les relations

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \delta &= a^2c^2b'^2(a'^2-c'^2)+b^2c^2a'^2(c'^2-b'^2)+a^2b^2c'^2(b'^2-a'^2), \\ \mathrm{A} &= a^2a'^2(c^2b'^2-b^2c'^2), \\ \mathrm{B} &= a^2b^2c^2a'^2(c'^2-b'^2)+a^2a'^2b'^2c'^2(b^2-c^2), \\ \mathrm{C} &= b^2b'^2(a^2c'^2-c^2a'^2), \\ \mathrm{D} &= a^2b^2c^2b'^2(a'^2-c'^2)+b^2a'^2b'^2c'^2(c^2-a^2), \\ \mathrm{E} &= c^2c'^2(b^2a'^2-a^2b'^2), \\ \mathrm{F} &= a^2b^2c^2c'^2(b'^2-a'^2)+c^2a'^2b'^2c'^2(a^2-b^2). \end{aligned}\right.$$

Les équations (11) donnent

$$dx^2 = \frac{A^2 u^2 du^2}{\delta(Au^2 + B)},$$

$$dy^2 = \frac{C^2 u^2 du^2}{\delta(Cu^2 + D)},$$

$$dz^2 = \frac{E^2 u^2 du^2}{\delta(Eu^2 + F)};$$

par suite, il vient, pour la différentielle de l'arc,

$$(13) \qquad ds = \frac{udu}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{A^2}{Au^2 + B} + \frac{C^2}{Cu^2 + D} + \frac{E^2}{Eu^2 + F}}.$$

En posant $u^2 = v$, cette expression devient, après que l'on a rendu le numérateur rationnel,

$$(14) \quad ds = \frac{dv}{2\sqrt{\delta}} \frac{A^2(Cv + D)(Ev + F) + C^2(Av + B)(Ev + F) + E^2(Av + B)(Cv + D)}{\sqrt{(Av + B)(Cv + D)(Ev + F)[A^2(Cv + D)(Ev + F) + C^2(Av + B)(Ev + F) + E^2(Av + B)(Cv + D)]}}.$$

Comme le polynôme que couvre le radical est d'un degré supérieur au quatrième, la rectification de la courbe gauche suivant laquelle se coupent les deux surfaces du second ordre dépend des fonctions abéliennes.

Avant d'aller plus loin, considérons le cas particulier où les deux surfaces sont de révolution autour de OZ, c'est-à-dire celui où l'on a

$$a = b, \quad a' = b'.$$

Alors les cylindres (5) et (6) se réduisent aux plans

$$(15)\qquad z = \pm cc' \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 c'^2 - c^2 a'^2}},$$

parallèles à XY; le radical du second membre est réel, d'après les conditions établies entre les axes des deux surfaces. Ainsi la courbe d'intersection est un des parallèles donnés par l'équation (15); le rayon de ces cercles est

$$aa' \sqrt{\frac{c^2 - c'^2}{c^2 a'^2 - a^2 c'^2}},$$

valeur réelle. La question est donc ramenée dans ce cas à trouver la longueur de la circonférence d'un cercle de rayon connu, ce qu'on sait faire. D'ailleurs, le cône considéré étant de révolution, la génératrice u est constante, et, par conséquent, on ne peut pas la prendre pour variable, comme nous l'avons fait dans le cas général. La formule (13) est effectivement illusoire.

L'aire conique est facile à calculer d'après ce qui précède. En effet, en représentant par $d\sigma$ l'aire du triangle infinitésimal formé par deux génératrices consécutives et par l'élément de la base du cône, on a

$$d\sigma = ds . \frac{u \sin\theta}{2},$$

θ étant l'angle du rayon vecteur u avec la tangente à la base du cône. Or

$$\cos\theta = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{u\,ds} = \frac{du}{ds};$$

donc

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{du^2}{ds^2}} = \frac{1}{ds}\sqrt{ds^2 - du^2};$$

par suite

$$d\sigma = \frac{u}{2}\sqrt{ds^2 - du^2}.$$

D'après la formule (13), il vient

$$d\sigma = \frac{udu}{2}\sqrt{\frac{u^2}{\delta}\left(\frac{A^2}{Au^2+B} + \frac{C^2}{Cu^2+D} + \frac{E^2}{Eu^2+F}\right) - 1}.$$

Posant $u^2 = \nu$ et réduisant au même dénominateur, on a

$$d\sigma = \frac{d\nu}{4\sqrt{\delta}}\sqrt{\frac{\nu\left[A^2(C\nu+D)(E\nu+F) + C^2(A\nu+B)(E\nu+F) + E^2(A\nu+B)(C\nu+D)\right] - \delta(A\nu+B)(C\nu+D)(E\nu+F)}{(A\nu+B)(C\nu+D)(E\nu+F)}}.$$

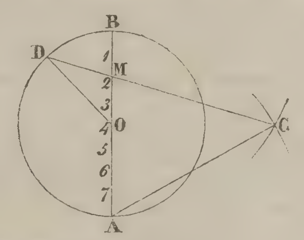
Si l'on rend le numérateur rationnel, le polynôme sous le radical se trouve du sixième degré, et, par conséquent, la quadrature de la surface conique dépend des fonctions ultra-elliptiques.

Quand les deux surfaces sont de révolution, le cône est aussi de révolution, et, par suite, on connaît son aire.

DIVISION PRATIQUE DE LA CIRCONFÉRENCE EN PARTIES ÉGALES;

Par M. HOUSEL,
Professeur.

On trouve, dans le *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques*, par Bion, page 22 [4e édit., Paris, 1752 (*)], la règle pratique suivante pour diviser une circonférence en un nombre n de parties égales : Divisez le diamètre AB en autant de parties égales qu'on veut en avoir sur la circonférence; des points A et B comme centres, et avec AB comme rayon, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent en C, puis joignez le point C *à la seconde division du diamètre;* cette ligne prolongée ira couper la circonférence en D, et BD sera la portion demandée de la circonférence.



Dans la figure, on a pris $n = 8$.

Mais il est important de savoir quelle approximation donne ce procédé, et c'est ce que nous allons chercher.

Posons

$$\text{AMC} = \alpha, \quad \text{ACM} = 6 \quad \text{et} \quad \text{DOB} = \gamma.$$

(*) Beaucoup de ces instruments ont été changés et très-perfectionnés, d'autres ne sont plus en usage. Un nouvel ouvrage de ce genre serait une excellente acquisition pour les mathématiques appliquées M. Schneitler a publié un tel ouvrage à Leipsig; la 2e édition est de 1852. Tm.

Dans le triangle MCA, on a la proportion

$$\sin\alpha : \sin 6 :: 2R : 2R - 2 \cdot \frac{2R}{n} :: 1 : 1 - \frac{2}{n},$$

car

$$AC = 2R = AB,$$

et d'ailleurs

$$6 = 120 - \alpha.$$

Ensuite, comme DMO $= 180 - \alpha$, le triangle DMO donne

$$\sin a : \sin(\alpha - \gamma) :: R : R - 2\frac{2R}{n} :: 1 : 1 - \frac{4}{n}.$$

On a donc

$$\sin\alpha : \sin(120 - \alpha) :: 1 : 1 - \frac{2}{n},$$

et

$$\sin\alpha : \sin(\alpha - \gamma) :: 1 : 1 - \frac{4}{n}.$$

En divisant chaque équation par $\sin\alpha$. On a d'abord

$$1 : \sin 120 \cot\alpha - \cos 120 :: 1 : 1 - \frac{2}{n}.$$

Or

$$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \cos 120 = -\frac{1}{2};$$

donc

$$\frac{\sqrt{3}\,.\cot\alpha + 1}{2} = \frac{n-2}{2},$$

et

$$\sqrt{3}\cot\alpha = \frac{2n-4}{n} - 1 = \frac{n-4}{n}; \quad \cot\alpha = \frac{n-4}{n\sqrt{3}}.$$

Ensuite

$$1 : \cos\gamma - \sin\gamma\cot\alpha :: 1 : 1 - \frac{4}{n},$$

ce qui donne

$$\cos\gamma - \frac{\sin\gamma\,(n-4)}{n\sqrt{2}} = \frac{n-4}{n}.$$

Soit $\cos\gamma = x$; on a

$$\frac{(1-x^2)(n-4)^2}{3n^2} = \frac{(n-4)^2}{n^2} + x^2 - \frac{2x(n-4)}{n},$$

$$x^2\left[1+\frac{(n-4)^2}{3n^2}\right] - \frac{2x(n-4)}{n} + \frac{2(n-4)^2}{3n^2} = 0;$$

d'où

$$x^2[3n^2+(n-4)^2] - 6n(n-4)x + 2(n-4)^2 = 0,$$

et enfin

$$x = (n-4)\cdot\frac{3n+\sqrt{n^2+16(n-2)}}{3n^2+(n-4)^2}.$$

On rejette le signe — qui donnerait des cosinus négatifs dans les valeurs de n suffisamment petites.

Il ne reste plus qu'à comparer les valeurs approximatives aux valeurs exactes :

Différences.				
0	$n = 3$,		exact.	
0	$n = 4$,		exact.	
— 5′ 48″	$n = 5$,	$\gamma = 71°57'12''$	au lieu de	72°,
0	$n = 6$,		exact.	
5′ 22	$n = 7$,	$\gamma = 51.31.\ 5$	au lieu de	51.25′43″,
11.14	$n = 8$,	$\gamma = 45.11.14$	*id.*	45,
16.40	$n = 9$,	$\gamma = 40.16.40$	*id.*	40,
21.24	$n = 10$,	$\gamma = 36.21.24$	*id.*	36,
25.14	$n = 11$,	$\gamma = 33.\ 8.52$	*id.*	32.43.38,
29.45	$n = 12$,	$\gamma = 30.29.45$	*id.*	30,
31.58	$n = 13$,	$\gamma = 28.12.30$	*id.*	27.41.32,
32.56	$n = 14$,	$\gamma = 26.15.48$	*id.*	25.42.52,
34.30	$n = 15$,	$\gamma = 24.34.30$	*id.*	24,
35.54	$n = 16$,	$\gamma = 23.\ 5.54$	*id.*	22.30,
36.37	$n = 17$,	$\gamma = 21.47.12$	*id.*	21.10.35.

Les différences augmentent comme on devait s'y attendre, mais très-lentement.

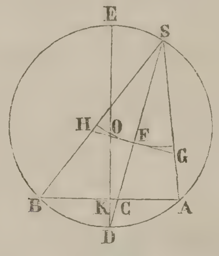
Le calcul a été poussé jusqu'au polygone de dix-sept côtés que l'on sait maintenant inscrire exactement; mais la construction qui résulterait des calculs de M. Gauss serait tellement pénible, que cette approximation vaudrait encore mieux dans la pratique (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 25

(voir t. I, p. 247);

Par M. H. FAURE.

Théorème I. *De tous les cônes inscrits dans un segment sphérique, celui qui a pour sommet le pôle de la base a le plus petit angle solide. La somme de deux angles solides des cônes qui ont pour sommets respectifs les pôles de la base commune, est égale à 4.* (Catalan.)



Démonstration. Soit S le sommet du cône; menons par ce point et le centre de la sphère un plan perpendiculaire au petit cercle de base; AB sera le diamètre de ce cercle, SA, SB les génératrices minimum et maximum du cône. Pour déterminer les pôles D et E du petit cercle, abaissons du centre O une perpendiculaire OK sur AB.

(*) Ce problème est aussi résolu dans la *Géométrie* de M. Catalan.

La droite SD sera l'axe de notre cône; et si, pour mesurer l'angle solide, nous décrivons du point S comme centre, avec un rayon quelconque, une sphère, elle coupera l'axe en F. Menons alors par ce point un plan tangent à la sphère S; le cône y déterminera une ellipse dont l'ellipse sphérique tracée sur la sphère S peut être considérée comme la perspective relativement au point S. Ces deux surfaces seront évidemment minimum à la fois. Si l'on appelle G, H les points où le plan tangent que nous avons mené rencontre les génératrices SA, SB de notre cône, la trace GH sera l'un des axes de l'ellipse plane, l'autre se trouvera projeté en F. Or, le premier ayant une longueur constante, la question se trouve ramenée à trouver le minimum du second. Cela est bien simple; car, si l'on suppose aux points C et F deux perpendiculaires au plan de la figure, elles rencontreront la génératrice du cône projetée sur SD en des points C′ et F′, tels que CC′ : FF′ :: SC : SF; d'où

$$FF' = \frac{CC'}{SC} \cdot SF,$$

où FF′ est le second axe; mais

$$CC' = \sqrt{AC.CB} = \sqrt{SC.CD};$$

donc

$$FF' = \sqrt{\frac{CD}{SC}} \cdot SF.$$

Et l'on voit sous cette forme que le rapport de $\frac{CD}{SC}$ sera minimum lorsque le point S se confondra avec le point E.

Quant à la seconde partie de la question, elle n'est pas moins évidente : il suffit de se rappeler la définition que l'on donne pour la mesure de l'angle solide d'un cône. Or on voit facilement qu'en divisant l'aire de l'ellipse sphé-

rique par $\frac{1}{8}$ de la surface totale de la sphère, on obtient un quotient proportionnel à l'angle solide. D'après cela, si nous désignons par D et E nos deux angles solides, on trouvera

$$\mathrm{D} = 4 \cdot \frac{\text{arc AEB}}{\text{circonf. OD}}, \quad \mathrm{E} = 4 \cdot \frac{\text{arc ADB}}{\text{circonf. OD}},$$

en donnant, pour plus de simplicité, aux sphères auxiliaires le même rayon qu'à la sphère donnée. On déduit de là

$$\mathrm{D} + \mathrm{E} = 4 \ (^*).$$

NOUVELLE ANALOGIE DE L'ALGÈBRE ET DU CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. E. BRASSINNE.

Soit $f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0$, une équation différentielle linéaire de l'ordre m; changeons y en yu (u étant une fonction indéterminée de x), nous aurons le développement suivant :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & f[x, yu, (yu)', \ldots, (yu)^{(m)}] = f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) . u \\ & + {}'f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) \frac{du}{dx} + {}''f(x, y, y', \ldots) \frac{d^2 u}{1.2.dx^2} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

L'expression (1) est bien connue des géomètres, et d'Alembert en fait usage pour démontrer un théorème de Lagrange. Le premier terme du second membre est l'équation proposée elle-même, multipliée par u. Le second terme contient une fonction que nous avons désignée par ${}'f(x, y, y' \ldots)$. Cette fonction, que j'ai appelée conjuguée première, dans un Mémoire sur la composition des

(*) C'est par erreur que le théorème est attribué à M. Catalan.

équations différentielles, s'obtient en dérivant la proposée par rapport aux ordres différentiels, comme en Algèbre on dérive par rapport aux exposants. Si, par exemple, on a

$$f(x, y, y' \ldots) = \frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + B\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots,$$

on trouvera

$$'f(x, y, y' \ldots) = m \cdot \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (m-1) A \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + (m-2) B \frac{d^{m-3} y}{dx^{m-3}} + \ldots.$$

Les fonctions $''f(x, y, y' \ldots)$, $'''f(x, y, y' \ldots)$, etc., correspondent aux dérivées secondes, troisièmes, ...

Cela posé, supposons que u soit une fonction de x, développée ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} u &= a + be^{\alpha x} + ce^{2\alpha x} + de^{3\alpha x} + \ldots \\ &= M + N\alpha x + P\alpha^2 x^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Faisons, pour plus de simplicité, $M = 1$, N positif. En portant cette valeur de u dans l'équation (1), on trouve

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & f[x, y, (yu)' \ldots] = f(x, y, y' \ldots)(1 + N\alpha x + \ldots) \\ & + \alpha\, 'f(x, y, y' \ldots)(N + 2P\alpha x + \ldots) \\ & + \alpha^2\, ''f(x, y, y' \ldots)(2P + \ldots). \end{aligned} \right.$$

Ce développement fait voir que le premier membre et le premier terme du second membre resteront de même signe, quel que soit x, lorsque α sera infiniment petit, si l'on substitue pour y une fonction quelconque de x. Mais si cette fonction de x, que nous appellerons $\varphi(x)$, est une intégrale de la proposée (nous supposerons la constante qui la multiplie égale à 1), le premier terme du second membre sera identiquement nul; de sorte que, dans le cas de α positif et très-petit, le premier membre aura le même signe que $'f(x, y, y' \ldots)$. Mais si, dans l'ex-

pression de u, on supposait α très-petit et négatif, le premier membre serait de signe contraire à $'f(x, y, y' \ldots)$. D'où résulte ce théorème : *Si, dans une équation différentielle linéaire, on substitue, au lieu de y,*

$$\varphi x(1 + \mathrm{N}\alpha x + \ldots) \quad \text{et} \quad \varphi(x)(1 - \mathrm{N}\alpha x + \ldots),$$

$\varphi(x)$ étant une intégrale de cette équation, les deux substitutions donneront des résultats en x constamment de signes contraires si α est très-petit.

Le théorème suppose que $\varphi(x)$ ne soit pas une intégrale de la fonction $'f(x, y, y' \ldots) = 0$, car alors le changement de signe de α ne changerait pas le signe du second membre; mais le théorème subsisterait, si un nombre pair de fonctions $'f$, $''f$, $'''f$, . . ., était annulé par $y = \varphi(x)$. Ce cas, qui correspond en Algèbre à celui des racines égales, entraîne pour la proposée, indépendamment de $\varphi(x)$, des intégrales $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, $x^3\varphi(x)$,..., en même nombre que les fonctions $'f$, $''f$, $'''f$,..., annulées, comme on peut le démontrer par l'équation (2), et comme je l'ai fait voir dans un Mémoire de 1842.

Remarquons que si la fonction indéterminée u était représentée par $e^{\alpha x}$, les expressions $y_1 = e^{\alpha x}\varphi(x)$, $y_2 = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ représenteraient des courbes au-dessus et au-dessous de la courbe $y = \varphi(x)$, fournie par l'intégrale.

Le théorème que nous avons énoncé a une réciproque évidente. Si, par exemple, deux substitutions $\varphi(x)\, e^{\alpha x}$, $\varphi(x)\, e^{-\alpha x}$ donnent, dans la proposée $f(x, y, y', \ldots)$, des résultats en x constamment de signe contraire, α étant très-petit, $\varphi(x)$ sera une intégrale de cette proposée.

SUR UN PROBLÈME DE COMBINAISONS;

Par M. E. PROUHET.

I.

La question que je me propose de résoudre est la suivante : *Combien y a-t-il de manières de résoudre m équations à m inconnues, en variant autant que possible l'ordre des éliminations et des substitutions?*

Soient R_m le nombre cherché et E_n le nombre des manières d'éliminer une inconnue entre n équations.

L'ordre dans lequel on dispose les m inconnues, pour chasser successivement les $m-1$ premières, peut être varié de 1. 2. 3,..., m ou de P_m manières, ce qui fait d'abord P_m modes de résolution distincts.

Mais la première, la seconde, la $n^{ième}$ inconnue peuvent être éliminées respectivement de E_m, de E_{m-1}, de E_n manières. Le nombre des modes déjà trouvés doit donc être multiplié par le produit $E_m E_{m-1},\ldots, E_3 E_2$.

Ensuite, quand on aura trouvé $n-1$ inconnues, il y aura n manières d'en obtenir une $n^{ième}$ en résolvant une quelconque des n équations qui renferment cette inconnue avec les $n-1$ premières. Il y aura donc deux manières d'obtenir la deuxième inconnue, trois manières d'obtenir la troisième, etc., ce qui multiplie encore par P_m le nombre des modes déjà trouvés.

De sorte que nous aurons, en définitive,

$$R_m = P_m^2 E_m E_{m-1} \ldots, E_3 E_2.$$

II.

Il s'agit maintenant de trouver E_m, E_{m-1}, etc., ou simplement E_m, c'est-à-dire de résoudre ce problème : *Com-*

bien y a-t-il de manières d'éliminer une inconnue entre m équations?

Désignons ces équations par les nombres 1, 2, 3,..., m. Pour en chasser une inconnue x, il faut éliminer $m - 1$ fois x entre deux de ces équations, en ayant soin d'employer chaque équation au moins une fois. D'après cela, si l'on forme les $\frac{m(m-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des m premiers nombres, savoir :

$$\begin{array}{l}(1,2)\\(1,3)\ (2,3)\\(1,4)\ (2,4)\ (3,4)\\(1,5)\ (2,5)\ (3,5)\\\dots\dots\dots\dots\\(1,m)\ (2,m)\ (3,m),\ldots,\ (m-1)\,m,\end{array}$$

les différents modes d'élimination que l'on pourra employer correspondront aux combinaisons $m - 1$ à $m - 1$ des termes de ce tableau, en excluant celles où manqueraient quelques-uns des nombres 1, 2,..., m.

Pour abréger le discours, nous réserverons le nom de *groupe* aux combinaisons dont nous venons de parler.

III.

Le nombre total des groupes possibles est

$$C_{m-1}^{T_m},$$

l'indice inférieur désignant le nombre des couples qui entrent dans chaque combinaison, et l'indice supérieur T_m servant à représenter le nombre triangulaire $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

T_{m-z} étant le nombre triangulaire égal ou immédiate-

ment supérieur à $m - 1$, il ne pourra manquer dans aucun groupe plus de z nombres; car si l'on ôte du tableau qui renferme tous les couples les $z + 1$ premières colonnes, les T_{m-z-1} couples restants ne peuvent former de groupes, puisqu'on a, par hypothèse,

$$T_{m-z-1} < m - 1.$$

On aura donc

$$C_{m-1}^{T_m} = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_z,$$

X_0 désignant le nombre des groupes où ne manque aucun nombre, X_1 le nombre de ceux où il en manque un seulement, X_2 le nombre de ceux où il en manque deux, et ainsi de suite.

IV.

On peut déterminer d'abord X_z. Si sur les T_m couples on laisse ceux qui contiennent z nombres pris à volonté, les T_{m-z} autres couples fourniront $C_{m-1}^{T_{m-z}}$ groupes où n'entrent pas les z nombres considérés. La même opération pouvant se répéter autant de fois qu'il y a de manières de prendre z choses sur m, on aura

$$X_z = C_z^m C_{m-1}^{T_{m-z}}.$$

Tous les X seront donc connus si l'on parvient à établir une relation entre X_i et X_{i+1}, X_{i+2}, etc.

V.

A cet effet, considérons i nombres sur m, par exemple

$$1, 2, 3, \ldots, i;$$

les groupes où n'entrent pas ces nombres s'obtiendront en combinant $m - 1$ à $m - 1$ les T_{m-i} couples où ces nom-

bres manquent. La même chose ayant lieu pour chaque manière de prendre i nombres sur m, on voit qu'en prenant

$$\overset{m}{\mathrm{C}}_i \overset{\mathrm{T}_{m-i}}{\mathrm{C}_{m-1}},$$

on sera sûr de compter, et chacun une seule fois, les groupes où n'entrent pas i des m nombres; mais il faut en retrancher les groupes où manquent plus de i nombres.

Or, tout groupe où manquent $i+1$ nombres, par exemple

$$1, 2, 3, \ldots, i, i+1,$$

fait partie des groupes où manquent i de ces nombres, et est compté $i+1$ fois. Il faut donc d'abord déduire du nombre précédent $(i+1)\,\mathrm{X}_{i+1}$.

Un groupe où manquent $i+2$ nombres, par exemple

$$1, 2, 3, \ldots, i, i+1, i+2,$$

fait partie des groupes où manquent i de ces nombres, et est ainsi répété $\frac{(i+1)(i+2)}{1.2}$ fois. On aura donc à déduire, pour les groupes de cette classe, $\frac{(i+1)(i+2)}{1.2}\mathrm{X}_{i+2}$.

On verrait de même qu'il faut déduire, à cause des groupes où manquent $i+3$ nombres, le nombre $\frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3}\mathrm{X}_{i+3}$, et ainsi de suite. On aura donc

$$\mathrm{X}_i = \mathrm{C}_i^m \overset{\mathrm{T}_{m-i}}{\mathrm{C}_{m-1}} - \frac{i+1}{1}\mathrm{X}_{i+1} - \frac{(i+1)(i+2)}{1.2}\mathrm{X}_{i+2} - \frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3}\mathrm{X}_{i+3} - \ldots$$

VI.

Si l'on fait successivement, dans cette formule, $i = z-1$, $z-2$, $z-3$, on trouve, toutes réductions

faites,

$$X_{z-1} = C^{m}_{z-1}\,\overset{T}{C}{}^{m-z+1}_{m-1} - \frac{z}{1}\,C^{m}_{z}\,\overset{T}{C}{}^{m-z}_{m-i},$$

$$X_{z-2} = C^{m}_{z-2}\,\overset{T}{C}{}^{m-z+2}_{m-1} - \frac{(z-1)}{1}\,C^{m}_{z-1}\,\overset{T}{C}{}^{m-z+1}_{m-1} + \frac{(z-1)z}{1.2}\,C^{m}_{z}\,\overset{T}{C}{}^{m-z}_{m-1},$$

$$X_{z-3} = C^{m}_{z-3}\,\overset{T}{C}{}^{m-z+3}_{m-1} - \frac{z-2}{1}\,C^{m}_{z-2}\,\overset{T}{C}{}^{m-z+2}_{m-1} + \frac{(z-2)(z-1)}{1.2}\,C^{m}_{z-1}\,\overset{T}{C}{}^{m-z+1}_{m-1} - \frac{(z-2)(z-1)z}{1.2.3}\,C_{z}\,\overset{T}{C}{}^{m-z}_{m-1},$$

formules dont la loi est évidente et qui donnent, par induction,

$$X_{n} = C^{m}_{n}\,\overset{T}{C}{}^{m-n}_{m-1} - \frac{n+1}{1}\,C^{m}_{n-1}\,\overset{T}{C}{}^{m-n-1}_{m-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\,C^{m}_{n-1}\,\overset{T}{C}{}^{m-n-2}_{m-2} - \ldots;$$

et, si l'on fait $n = 0$,

$$X_{0} = \overset{T}{C}{}^{m}_{m-1} - C^{m}_{1}\,\overset{T}{C}{}^{m-1}_{m-1} + C^{m}_{2}\,\overset{T}{C}{}^{m-2}_{m-1} - C^{m}_{3}\,\overset{T}{C}{}^{m-3}_{m-1} + \ldots.$$

Mais X_0 n'est autre chose que ce que nous avons désigné en commençant par E_m. Donc notre problème est résolu.

Comme vérification, on s'assurerait facilement, d'après les formules précédentes, que la somme des nombres X_0, $X_1, X_2, \ldots, X_z$ est égale à $\overset{T}{C}{}^{m}_{m-1}$.

VII.

Le nombre R_m croît très-rapidement avec son indice, comme on en jugera par le tableau suivant :

$E_2 = 1$, $R_2 = 4$.
$E_3 = 3$, $R_3 = 108$,
$E_4 = 16$, $R_4 = 27648$,
$E_5 = 135$, $R_5 = 122112000$.

Nous remarquerons, en terminant, que quelques-unes de nos formules peuvent servir à résoudre des problèmes relatifs à la géométrie de situation. Ainsi X_0, $\frac{X_1}{m}$, $\frac{1.2.X_2}{m(m-1)}$, indiquent respectivement le nombre de manières de mener $m-1$ droites entre m, $m-1$, $m-2$, etc., points, de telle sorte qu'aucun de ces points ne soit isolé.

THÉORIE ANALYTIQUE DES FAISCEAUX PLANS.

Rapports composés fasciculaires plans.

1. Écrivons un système de $2n$ équations représentant un faisceau plan de $2n$ rayons, savoir :

$$y-\beta=a_1(x-\alpha),\quad y-\beta=a_2(x-\alpha),\ldots,$$
$$y-\beta=a_{2n}(x-\alpha).$$

Considérons les $2n$ quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ comme les $2n$ racines d'une équation, et formons, avec ces quantités, un rapport segmentaire composé (page 29). Ce rapport est dit rapport composé du faisceau, ou *rapport fasciculaire,* et il y a autant de ces rapports qu'on peut former de rapports composés segmentaires avec $2n$ quantités (*voir* tome VI, page 68).

Observation. Par l'origine menons des droites parallèles aux rayons du faisceau. Les équations de ces droites sont

$$y=a_1x,\quad y=a_2x,\ldots,y=a_{2n}x;$$

$x = 1$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des y; les différences telles que $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, etc., sont les différences des segments interceptés par les rayons sur la parallèle. Le rapport composé fasciculaire est donc un rapport segmentaire qu'on peut convertir en rapports *triangulaires* et *sinussiques* (tome VI, page 67).

2. Théorème. *Étant donnés* $2n$ *points dans un plan et la valeur d'un rapport composé d'un faisceau qui passe par ces points, l'équation du lieu géométrique du sommet du faisceau qui passe par ces points est une ligne de degré* n *qui passe par les* $2n$ *points.*

Démonstration. Le numérateur du rapport fasciculaire est un produit de n facteurs de la forme $a_r - a_s$, et l'on a

$$a_r = \frac{\beta - y_r}{\alpha - x_r}, \quad a_s = \frac{\beta - y_s}{\alpha - x_s};$$

α, β sont les coordonnées du sommet du faisceau; x_r, y_r, etc., sont les coordonnées des points; donc

$$a_r - a_s = \frac{\alpha(y_s - y_r) + \beta(x_r - y_s) + y_r x_s - x_r y_s}{(\alpha - x_r)(\alpha - x_s)}.$$

Ainsi le numérateur est un polynôme de degré n relativement à α et β, divisé par le produit des $2n$ facteurs $(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_{2n})$; il en est de même du dénominateur. L'équation du lieu cherché est donc

$$(1) \qquad P = mQ;$$

P et Q sont des polynômes en α, β de degré n, et m est la valeur du rapport fasciculaire.

Si l'on prend un des points donnés pour origine, la quantité toute connue s'annule. La courbe passe donc par ce point, et par conséquent la courbe passe par les $2n$ points.

Faisant $P = 0$, $Q = 0$, l'équation (1) est satisfaite, quel que soit p; les courbes passent donc par les mêmes n^2 points. Outre les $2n$ points, les courbes ont encore en commun $n(n-2)$ points. Si les $2n$ points donnés sont sur une ligne de degré $n-1$, les $n(n-2)$ points sont sur une droite.

L'équation générale d'une courbe de degré n renferme $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients; l'équation (1) renferme $4n+1$ indéterminées, savoir les coordonnées des $2n$ points et la valeur m du rapport. On peut donc, généralement parlant, identifier l'équation (1) avec une équation donnée de degré n, tant que n est moindre que 6, et il y a des données qu'on peut prendre arbitrairement.

2. *Application.* $n = 2$. Un faisceau de quatre rayons donne les trois rapports anharmoniques directs

$$\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} \cdot \frac{a_4 - a_2}{a_4 - a_1} = m_1, \quad \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_3} \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1} = m_2,$$

$$\frac{a_2 - a_1 . a_3 - a_4}{a_2 - a_4 . a_3 - a_1} = m_3,$$

$$m_2 - m_1 m_2 = 1 \qquad (\textit{Géom. sup.}, \text{p. } 25),$$

$$m_3 - m_2 m_3 = 1,$$

$$m_1 - m_3 m_1 = 1,$$

$$- m_1 m_2 m_3 = 1.$$

Ces trois rapports sont essentiellement inégaux et racines de l'équation

$$x^3 - px^2 + (p-3)x + 1 = 0,$$

où p est la somme des rapports.

Faisant le calcul pour le premier rapport, on trouve

$$P = m_1 Q,$$

où

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = {} & \beta^2 (x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \\
& - \alpha\beta [(y_3 - y_1)(x_4 - x_2) + (y_4 - y_2)(x_3 - x_1)] \\
& + \alpha^2 (y_3 - y_1)(y_4 - y_2) \\
& + \beta [(x_3 - x_1)(y_4 x_2 - x_4 y_2) + (x_4 - x_2)(y_3 x_1 - x_3 y_1)] \\
& + \alpha [(y_3 - y_1)(x_4 y_2 - y_4 x_2) + (y_4 - y_2)(x_3 y_1 - y_3 x_1)] \\
& + (y_3 x_1 - x_3 y_1)(y_4 x_2 - x_4 y_2).
\end{aligned}$$

On déduit Q de P en changeant l'indice 1 en 2 et l'indice 2 en 1, et laissant les indices 3 et 4 tels qu'ils sont.

Les quantités telles que $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ sont les coefficients angulaires des côtés du quadrilatère, et les quantités telles que $\dfrac{y_4 x_2 - x_4 y_2}{x_4 - x_2}$ sont les coordonnées à l'origine des côtés.

Prenons pour axes deux côtés consécutifs du quadrilatère. A cet effet, faisons $x_1 = y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_3 = 0$; alors l'équation se réduit à celle-ci :

$$\begin{aligned}
& m_1 x_2 x_4 \beta^2 + [m_1 (x_4 y_3 - x_2 y_4) + y_3 (x_2 - x_4)] \alpha\beta \\
& + (1 - m_1) y_3 y_4 \alpha^2 - m_1 x_2 x_4 y_3 \beta + (m_1 - 1) x_2 y_3 y_4 \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Faisant $\alpha = x_2$, on obtient

$$\beta = \frac{m_1 x_2 y_4 - x_2 y_3 + x_4 y_3}{m_1 x_4}.$$

Ayant ainsi un cinquième point de la conique, on peut la construire géométriquement.

Faisant $m = -1$, on a la conique correspondant à la relation harmonique. Les deux autres rapports sont 2 et $\frac{1}{2}$.

Pour la conique répondant au second rapport, on a

$$-\mathrm{Q} = m_2 \mathrm{P}';$$

donc

$$P = m_1 m_2 P' = -\frac{P'}{m_3}, \quad P' = m_3 P,$$

et

$$Q = -m_2 m_3 P, \quad m_1 Q = P;$$

ainsi le second rapport donne la même conique que le premier. Il en est de même du troisième rapport, résultat évident à priori.

3. *Application*. $n = 3$;

$$\frac{a_1 - a_2 . a_3 - a_4 . a_5 - a_6}{a_1 - a_4 . a_3 - a_6 . a_5 - a_2} = m_1,$$

on a

$$\begin{aligned} P = & [\alpha(y_2 - y_1) + \beta(x_1 - x_2) + (y_1 x_2 - x_2 y_1)] \\ & [\alpha(y_4 - y_3) + \beta(x_3 - x_4) + y_3 x_4 - x_3 y_4] \\ & [\alpha(y_6 - y_5) + \beta(x_5 - x_6) + y_5 x_6]. \end{aligned}$$

Changeant 2 en 4, 4 en 6, 6 en 2, et *vice versâ*, on obtient Q, et l'équation cherchée est

$$P = m_1 Q.$$

Les quantités telles que $\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$, $\frac{y_1 x_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2}$, etc., sont données en fonction des angles et des côtés de l'hexagone.

Si l'on prend trois rapports tels, que l'on ait les mêmes équations qu'au § 2, on démontre, comme ci-dessus, qu'à chaque rapport répond la même courbe du troisième degré. On a en tout quinze rapports; ainsi il y a cinq courbes différentes.

Fonctions d'involution et involutions.

4. Problème. *Soit l'équation*

$$y = a_n x;$$

donnant à l'indice n successivement les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, *on obtient les équations de six droites passant*

par l'origine : quelle relation doit exister entre les six coefficients angulaires $a_1, a_2, \ldots, a_6$ pour que le faisceau soit en involution ?

Solution. Supposons que les rayons conjugués correspondent respectivement aux coefficients a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6. La droite parallèle à l'axe des y, représentée par l'équation

$$x = \alpha,$$

coupe le faisceau en six points en involution; les trois équations relatives aux trois couples en involution sont

$$y^2 - \alpha y (a_1 + a_2) + a_1 a_2 \alpha^2 = 0,$$
$$y^2 - \alpha y (a_3 + a_4) + a_3 a_4 \alpha^2 = 0,$$
$$y^2 - \alpha y (a_5 + a_6) + a_5 a_6 \alpha^2 = 0.$$

Pour que les points soient en involution, le déterminant formé par les coefficients doit être nul (page 27); donc on a la relation

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \quad a_1 a_2 [a_3 + a_4 - (a_5 + a_6)] + a_3 a_4 [a_5 + a_6 - (a_1 + a_2)] \\ + a_5 a_6 [a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)] = 0. \end{array} \right.$$

5. Lorsque cette expression n'est pas égale à zéro, elle porte le nom de *fonction d'involution* du faisceau.

6. Théorème. *Le lieu du point duquel menant six droites à six points situés dans le même plan, on forme un faisceau dont la fonction d'involution est constante, est une ligne du sixième ordre.*

Démonstration.

Notation. x_1, y_1; $x_2, y_2 \ldots$; x_6, y_6, coordon. des points fixes;
α, β, coordonnées du centre du faisceau;
m, valeur constante de la fonction d'involution.

Les équations des six rayons sont

$$y - \beta = a_1(x - \alpha), \quad y - \beta = a_2(x - \alpha), \ldots,$$
$$y - \beta = a_6(x - \alpha);$$

d'où

$$a_1 = \frac{\beta - y_1}{\alpha - x_1}, \ldots, \quad a_6 = \frac{\beta - y_6}{\alpha - x_6}.$$

Il faut substituer ces valeurs de $a_1, \ldots, a_6$ dans la fonction d'involution. Il est évident que le membre à droite de l'équation est évidemment

$$m(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_6).$$

L'équation est donc du sixième degré; car le facteur en m ne se trouvant pas dans le membre à gauche, généralement parlant, aucune réduction n'est possible. Cherchons le membre à gauche, en réduisant tout au même dénominateur; faisons

$$P = (\beta - y_1)(\beta - y_2)(\beta - y_3),$$
$$P' = (\alpha - x_4)(\alpha - x_5)(\alpha - x_6);$$

alors

$$a_1 a_2 a_3 = PP'.$$

Changeant dans ce produit l'indice 3 en 4, et *vice versâ*, on aura

$$a_1 a_2 a_4;$$

on obtient de même

$$a_1 a_2 a_5 \quad \text{et} \quad a_1 a_2 a_6;$$

on a donc ainsi

$$a_1 a_2 [a_3 + a_4 - (a_5 + a_6)].$$

Augmentant dans cette expression tous les indices de deux unités, et écrivant 1 au lieu de 7 et 2 au lieu de 8, on aura

$$a_3 a_4 [a_5 + a_6 - (a_1 + a_2)];$$

de cette dernière expression on déduit de même

$$a_5 a_6 [a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)].$$

On voit facilement que les termes supérieurs au troisième degré et le terme $\alpha\beta$ disparaissant, l'équation cherchée est

$$(1)\left\{\begin{array}{l} A\alpha^3 + A'\beta^3 + B\alpha^2\beta + B'\alpha\beta^2 + C\alpha^2 + C'\beta^2 \\ + D\alpha + D'\beta + F = m(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)(\alpha - x_3)\ldots(\alpha - x_6), \end{array}\right.$$

où

$$\begin{aligned} A = {} & y_1y_2[y_3 + y_4 - (y_5 + y_6)] + y_3y_4[y_5 + y_6 - (y_1 + y_2)] \\ & + y_5y_6[y_1 + y_2 - (y_3 + y_4)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = {} & (x_1y_2 + x_2y_1)[y_3 + y_4 - (y_5 + y_6)] \\ & + (x_3y_4 + x_4y_3)[y_5 + y_6 - (y_1 + y_2)] \\ & + (x_5y_6 + x_6y_5)[y_1 + y_2 - (y_3 + y_4)] \\ & + y_1y_2[x_3 + x_4 - (x_5 + x_6)] + y_3y_4[x_5 + x_6 - (x_1 + x_2)] \\ & + y_5y_6[x_1 + x_2 - (x_3 + x_4)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = {} & y_1y_2y_3(x_1 + x_2 + x_3) + y_1y_2y_4(x_1 + x_2 + x_4) \\ & + y_1y_2y_5(x_1 + x_2 + x_5) + y_1y_2y_6(x_1 + x_2 + x_6) \\ & + y_3y_4y_5(x_3 + x_4 + x_5) + y_3y_4y_6(x_3 + x_4 + x_6) \\ & + y_3y_4y_1(x_3 + x_4 + x_1) + y_3y_4y_2(x_3 + x_4 + x_2) \\ & + y_5y_6y_1(x_5 + x_6 + x_1) + y_5y_6y_2(x_5 + x_6 + x_2) \\ & + y_5y_6y_3(x_5 + x_6 + x_3) + y_5y_6y_4(x_5 + x_6 + x_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = {} & y_1y_2(x_3 + x_4)(y_3x_3 + y_4x_4 - y_5x_5 - y_6x_6) \\ & + y_3y_4(x_5 + x_6)(y_5x_5 + y_6x_6 - y_1x_1 - y_2x_2) \\ & + y_5y_6(x_1 + x_2)(y_1x_1 + y_2x_2 - y_3x_3 - y_4x_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = {} & y_1y_2x_1x_2(y_5x_5 + y_6x_6 - y_3x_3 - y_4x_4) \\ & + y_3y_4x_3x_4(y_1x_1 + y_2x_2 - y_5x_5 - y_6x_6) \\ & + y_5y_6x_5x_6(y_3x_3 + y_4x_4 - y_1x_1 - y_2x_2). \end{aligned}$$

En changeant x en y et y en x, on déduit A′ de A, B′ de B, C′ de C, D′ de D.

On peut choisir l'origine et les axes de manière que l'on ait

$$x_1 = y_1 = 0, \quad y_3 = 0, \quad x_5 = 0;$$

alors la quantité toute connue s'annule; la courbe passe donc par le point (x_1, y_1); donc la courbe passe par les

six points donnés. Si l'on fait $\alpha = x_1$, on a une équation du troisième degré en β, dont une des racines est y_1, et les deux autres racines donnent deux autres points; de même pour $\alpha = x_2$, etc. Donc, quelle que soit la valeur de m, la courbe passe par *dix-huit* mêmes points.

7. Si $m = 0$, le faisceau est en involution, et la courbe est du troisième degré passant par les six points donnés.

Réciproquement, étant donnée une courbe du troisième degré, s'il s'agit de trouver sur la courbe six points tels, qu'en les joignant à un septième point de la courbe on obtienne un faisceau en involution, il faut identifier l'équation donnée avec l'équation (1), ce qui donne *neuf* conditions pour *douze* inconnues (*).

8. Le théorème VI peut se généraliser. Prenons dans un plan $4n + 2$ points, et désignons les coordonnées de ces points par $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_{4n+2}, y_{4n+2}$, et d'un point (α, β) du plan menons $4n + 2$ droites à ces points; les équations de ces droites sont

$$y - \beta = a_1(x - \alpha), \quad y - \beta = a_2(x - \alpha) \ldots,$$

et

$$a_p = \frac{\beta - y_p}{\alpha - x_p}.$$

Écrivons la fonction

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_{4n+2} = m,$$

ou

$$M_1 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2n} \left[\begin{array}{c} (a_{2n+1} + a_{2n+2} \ldots) \\ + a_{3n+1} - (a_{3n+2} + a_{3n+3} \ldots a_{4n+2}) \end{array} \right];$$

on déduit M_2 de M_1 en ajoutant $2n - 1$ à chaque indice, et lorsque la somme dépasse $4n + 2$, on n'admet que le résidu de la somme divisée par $4n + 2$. On déduit de même M_3 de M_2, et ainsi de suite; m est un nombre donné.

(*) *Voir* Cayley, *Journal de Mathématiques*, tome IX.

Remplaçant dans cette fonction a_1, a_2, etc., par leurs valeurs en α, β, x_1, y_1, etc., on obtient une équation dont le membre à droite est évidemment

$$m(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_{4n+2}),$$

et par conséquent de degré $4n+2$; mais le membre à gauche est de degré $2n+1$, et lorsque $m=0$, la courbe est aussi de ce degré. On voit d'intuition que $(\alpha\beta)^{2n+1}$ disparaît; il est facile aussi de s'assurer que les termes $\beta^{2n+1}\alpha^n$, $\alpha^{2n+1}\beta$ s'annulent. Mais je n'ai pas encore la démonstration générale. On prouve aisément que la courbe passe par les $4n+2$ points.

9. Les propriétés segmentaires de ce genre qui appartiennent aux courbes de degré n, appartiennent aussi aux courbes de degré inférieur; par conséquent, une courbe du troisième degré peut se décomposer en un système d'une courbe du deuxième degré et d'une droite.

QUESTIONS.

270. Soient un triangle ABC et un point p dans le plan du triangle; par le point p menons trois droites, de sorte que p soit le milieu de la partie rr' interceptée entre les côtés a et b, de la partie ss' interceptée entre b et c, et de la partie tt' interceptée entre c et a; les six points r, r', s, s', t, t' sont sur une même conique M. Menant par le sommet A une droite α formant, avec les trois droites b, c, pA, un faisceau harmonique, et, d'une manière analogue, une droite β en B et γ en C, il existe une conique M' qui touche les trois droites α, β, γ en A, B, C, et la conique M' est homothétique à la conique M.

(Steiner.)

271. *Mêmes données.* Par le point p et les sommets

A, B, C on mène trois droites rencontrant respectivement les côtés a, b, c en a_1, b_1, c_1; si l'on a $Ap.Bp.Cp = a_1p.b_1p.c_1p$, le lieu des points p est une ellipse circonscrite au triangle, et ayant pour centre le centre de gravité du triangle. (Steiner.)

272. a, α; b, β; c, γ étant les foyers de trois coniques inscrites au même quadrilatère, on a cette relation

$$\frac{ac.\alpha c}{bc.\beta c} = \frac{a\gamma.\alpha\gamma}{b\gamma.\beta\gamma}.$$

(Steiner.)

NOTE SUR UNE RÉCENTE PUBLICATION (*).

1. *Angles trièdres. Chaque face d'un angle trièdre* (sic) *est plus petite que la somme des deux autres.*

Que signifie ici le mot *face?* En y réfléchissant, on devine facilement ce qu'on a voulu dire. Pourquoi employer dans les sciences exactes des locutions énigmatiques? La proposition 21 du livre V de Legendre est ainsi conçue : *Si un angle solide est formé par trois angles plans, la somme de deux quelconques de ces angles sera plus grande que le troisième.* C'est là le langage d'Euclide (liv. XI, prop. 20). D'après l'énoncé *officiel,* un élève pourra croire que, dans un tétraèdre, chaque face est toujours plus petite que la somme des deux autres.

2. *Relations entre le carré du nombre qui exprime la longueur du côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu ou obtus, et les carrés des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.*

C'est ainsi qu'on prétend formuler le théorème de Pythagore et ses deux corollaires.

(*) *Moniteur,* 30 novembre 1852.

On croyait impossible d'introduire dans la Géométrie le style des *Précieuses Ridicules :* c'est une difficulté vaincue. En se tenant *strictement* à l'énoncé *officiel*, je ne vois pas même moyen de démontrer le théorème. Aussi je reviens toujours à mon éternel *postulatum*, à l'impérieuse nécessité d'introduire dans les Commissions *mathématiques*, non-seulement des hommes *instruits*, comme on les appelle, mais des *mathématiciens sérieux ;* j'appelle ainsi des savants qui font de cette science une étude spéciale, permanente, en suivent les progrès et y contribuent. Dans la composition de ces Commissions, on n'a égard qu'à des *positions hiérarchiques ;* tandis que dans la république des lettres, et celle-là subsiste à Constantinople aussi bien qu'à Philadelphie, la seule hiérarchie valable est celle que la science assigne : toute autre est non avenue. C'est dans cet esprit qu'Euclide disait déjà au roi Ptolémée :

En Géométrie, il n'y a pas de sentier royal.

Ainsi le veut le bon sens. Aussi ne suis-je nullement surpris qu'on ne le veuille pas (*).

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;

Par le P. LECOINTE S.-J.,

Professeur au Collége Saint-Michel, à Saint-Étienne.

Dans le tome VII, page 272, du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, M. Chasles a donné une démonstration de la propriété de la projection stéréographique, qui consiste en ce que *le centre de la projection d'un cercle est la projection du sommet du cône circonscrit à*

(*) Dans plusieurs Traités estimables de Géométrie, on rencontre le mot *face* pris dans le sens d'*angle*, mais à tort; Euclide a raison, et avec lui Legendre et Lacroix.

la sphère suivant ce cercle, propriété qui revient au théorème suivant de Géométrie :

Un cercle quelconque étant tangent à une droite AB au point C, si TN, TN′ sont deux tangentes menées d'un même point T à ce cercle, N et N′ leurs points de contact respectifs, XX′ le diamètre du cercle parallèle à AB, n, n', t les points de rencontre des droites NC, N′C, TC avec XX′, on a

$$tn = tn'.$$

La démonstration du célèbre géomètre, quoique simple, peut encore recevoir une simplification, en ce qu'il n'est nullement nécessaire de recourir à la Trigonométrie, ainsi que nous allons le voir.

Soit I le second point de rencontre de TC avec la circonférence du cercle, et menons les cordes NI, N′I.

Les deux triangles NTI, NTC étant semblables, ainsi que les deux triangles N′TI, N′TC, on a

$$\frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TC}}, \quad \frac{\mathrm{N'I}}{\mathrm{N'C}} = \frac{\mathrm{N'T}}{\mathrm{TC}} = \frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TC}};$$

d'où

(1) $$\frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{N'I}}{\mathrm{N'C}}.$$

Maintenant, les deux arcs CX, CX′ étant égaux comme interceptés entre parallèles, les deux triangles $nt\mathrm{C}$, NCI sont semblables, ainsi que les deux triangles $n't\mathrm{C}$, N′CI, et l'on a, par conséquent,

$$\frac{nt}{t\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NC}}, \quad \frac{n't}{t\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N'I}}{\mathrm{N'C}};$$

d'où, en vertu de l'égalité (1),

$$nt = n't \text{ (*)}.$$ C. Q. F. D.

(*) *Voir* Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, page 301.

MÉLANGES.

1. L'expression hybride *homofocale* a été récemment introduite dans la science, je crois, à l'occasion des belles découvertes de M. Lamé (1837); mais l'expression légitime *homocentrique* y existe depuis longtemps; ainsi on a un ouvrage de Jérôme Fracastor, intitulé : *Homocentrica sive de Stellis; Verone,* 1538; il fait mouvoir les planètes dans des cercles concentriques. Fracastor, né à Vérone, en 1483, était médecin, philosophe et poëte; il est mort en 1548. L'ouvrage de Copernic, *de Revolutionibus orbium cælestium,* qui a fait disparaître toutes les anciennes hypothèses, n'a paru qu'en 1543, année de la mort de l'illustre chanoine de la cathédrale de Wiarme; imprimé à Nuremberg, l'exemplaire qui lui était destiné parvint à Wiarme le jour même, et quelques heures *priusquam animam efflaret, videret quidem et contigerit, sed erant jam tum aliæ ipsi curæ;* ce sont les paroles de Gassendi, dans la Vie de Copernic, qu'il a dédiée à Jean Chapelain, homme très-instruit, aimant les sciences et d'un très-beau caractère, mais ayant eu le tort, dans un âge très-avancé, de faire un poëme *épique* dont l'héroïne est une jeune fille [GASSEN., *Op. omnia,* t. V, p. 497 (*)].

On connaît les propriétés de l'homofocalité des surfaces du second ordre isothermes (Lamé, *Journal de mathématiques,* tome II, page 147, 1837). Il paraît que c'est

(*) La célèbre parodie de ce poëme est une mauvaise action dont beaucoup de poëtes voudraient être capables. Elle a été inspirée par les mœurs corrompues du XVIIIe siècle, qui sont celles du XVIIe, moins l'hypocrisie. Les nôtres, quoi qu'on dise, valent mieux que celles du siècle *pieux* et du siècle *impie*.

Boscowich qui, le premier, a eu l'idée d'appliquer l'homofocalité à des propriétés de physique mathématique. Il représente la loi d'attraction par une certaine courbe dont l'équation est $y = f(x)$, où y est la force et x la distance; cette courbe est continue; elle coupe l'axe des distances en plusieurs points qui sont des limites *de cohésion*, où l'attraction se change en répulsion, et *vice versâ*. La courbe a pour asymptote l'axe des y, du côté positif (attractif) et finit par devenir presque parallèle à l'axe des x dans la région négative. Cela posé, il considère une suite d'ellipses biconfocales dans un même plan. Les foyers sont des molécules attractives; les demi-axes focaux représentent alternativement des limites de *cohésion* et de *non-cohésion* (passage dans la courbe d'attraction du positif au négatif et du négatif au positif). Si les arcs de cette courbe attractive, terminés aux points limites, sont égaux, une molécule placée sur le périmètre d'une ellipse se dirigera sur la tangente, tantôt vers le grand axe et tantôt vers le petit axe; et si la molécule est placée entre deux ellipses, elle sera tantôt attirée et tantôt repoussée.

Il explique, par ces effets attractifs et répulsifs, les actions du calorique, etc. Cette courbe est l'idée fondamentale d'un ouvrage très-remarquable et très-rare du célèbre jésuite; en voici le titre : *Theoria philosophiæ naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium; auctore Rogerio Josepho Boscovic Societatis Jesu, nunc ab ipso perpolita et aucta, ac a plurimis præcedentium editionum mendis expurgata; editio Venetia prima, ipso auctore præsente et corrigente. Venetiis,* MDCCLXIII. *Ex typographiâ Remundiniana superiorum permiss. ac privilegio*, in-4° de 311 pages.

La première édition est de Vienne, de 1758; la seconde parut quelque temps après, aussi à Vienne; celle de Venise est la troisième.

Dans le système de Boscowich, les corps sont formés de points sans étendue, et exerçant les uns sur les autres, des forces à distance et telles que ces points ne peuvent jamais se réunir, se toucher, de sorte que dans le choc des corps, il n'y a jamais contact, mais action réciproque à distance; ils modifient leurs vitesses respectives, non pas subitement, mais d'une manière continue, selon la loi des forces moléculaires représentées par la courbe dont nous avons parlé ci-dessus. Au moyen de cette courbe, dont la forme générale reste la même dans tous les cas et dont la forme particulière varie avec les corps, Boscowich explique tous les phénomènes de mouvement du monde matériel, et les effets de cohésion, adhésion, actions chimiques, capillaires, etc. Il suffit, pour se faire une idée juste de sa courbe des forces, de lire dans l'ouvrage (page 277) le supplément intitulé : *Solutio analytica problematis determinantis naturam legis virium*; il indique une équation où entrent y et x, qui peut donner cette forme, problème nécessairement indéterminé. A cet effet, il pose

$$x^2 = z,$$

et ensuite

$$P = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + \ldots + f,$$
$$Q = z^{p+1} + gz^p + hz^{p-1} + \ldots + lz;$$

et l'équation de la courbe des x, y est

$$P - Qy = 0;$$

P et Q ne doivent pas avoir de facteur commun. Les opinions de Boscowich ont été soutenues depuis par MM. Cauchy, Saint-Venant, Lamé, et par d'autres savants géomètres. D'ailleurs les points inétendus de Boscowich ne diffèrent pas essentiellement des monades de Leibnitz.

2. L'Italie s'est toujours montrée, dans la région intellectuelle, au premier rang; c'est elle qui nous a ouvert les trésors de l'antiquité littéraire et scientifique (*). Combien ne devons-nous pas au seul Commandin? La malheureuse péninsule (*Italia! Italia!*) conserve son illustre nationalité au moins dans les travaux de l'esprit. Pour s'en convaincre, en ce qui concerne les sciences exactes, il suffit de parcourir le recueil mensuel que publie à Rome, le célèbre professeur Barnaba Tortolini, collection qui gagne chaque jour en intérêt par les savantes communications des Boncompagni (Balthazar), Brioschi, Chellini, Genocchi, Secchi, Tardy, Tortolini, Volpicelli, etc. On y trouve l'annonce avec éloge d'un nouveau Traité de géométrie descriptive par M. Giusto Bellavitis de Bassano, professeur de cette science à l'Université de Padoue. On dit que l'auteur a suivi une nouvelle méthode qui *non è nè copia nè imitazione di verun altra*. L'ouvrage est divisé en cinq livres, qui traitent avec un ordre et une clarté admirables, des points, des droites, des plans, des lignes et surfaces courbes, des intersections, des contacts et de la courbure des lignes et des surfaces, et toujours sous un point de vue général, évitant les cas particuliers qui ne peuvent jamais épuiser un sujet aussi bien qu'un petit nombre d'idées générales. Des notes instructives terminent ce Traité, la dernière est l'esquisse d'une nouvelle géométrie dite de *dérivation;* on ne dit pas en quoi cette géométrie consiste (*Annali delle Scienze matematiche*, juillet 1852, page 339). M. Bellavitis a publié, en 1835, une méthode dite des *équipollences*, au moyen desquelles il établit une importante relation entre des points situés sur la même droite, et à l'aide de laquelle

(*) Ce pays est le seul aussi où ait brillé, dans les temps modernes, le vrai génie épique. Le Tasse est le second poëte, puisque Homère est le premier.

il enseigne une nouvelle voie pour découvrir directement les constructions géométriques dans la résolution des problèmes qui seraient longs à traiter par les méthodes connues.

EXPLICATION D'UN PARADOXE QUE PRÉSENTE LA DESCRIPTION ORGANIQUE DES COURBES (*).

1. Si une droite est donnée de longueur et de direction, et si une extrémité décrit une droite donnée de position comme directrice, l'autre extrémité décrit une droite parallèle à la droite directrice.

2. Si une droite est donnée de longueur et de direction, et décrit par une de ses extrémités une ligne quelconque donnée de position, la tangente menée par la seconde extrémité à la ligne qu'elle décrit, est parallèle à la tangente menée par la première extrémité à la ligne directrice.

Il est évident qu'on obtient la seconde courbe en faisant mouvoir la première parallèlement à elle-même.

3. Une droite de longueur donnée décrivant par une de ses extrémités une ligne plane et faisant, avec cette ligne directrice et dans son plan, un angle constant; le parallélisme des tangentes, dont il est question au paragraphe précédent, n'existe plus, comme on est tenté de le croire à première vue; car, la droite mobile, dans une position infiniment voisine, ne reste pas parallèle à elle-même. Soient A et A′ deux points consécutifs sur la directrice, B et B′ deux points consécutifs correspondants sur la courbe décrite par l'autre extrémité; O étant le centre de courbure de l'arc AA′, il est évident que la normale en B

(*) Paradoxe remarqué par M. Mannheim, aujourd'hui lieutenant d'artillerie.

passe par le point O, c'est-à-dire que la tangente BB' est perpendiculaire à la droite BO; les courbes décrites par les points de la droite AB ont en ces points des normales qui passent par le point O (Chasles), et toutes les tangentes en ces points enveloppent une parabole dont le foyer est en O et qui a pour sommet le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite AB.

Observation. Lorsque le point A est *multiple* ou d'inflexion, le point correspondant B est aussi multiple ou d'inflexion, et dans ce dernier cas, la tangente en B est parallèle à la tangente en A.

Lorsque l'angle constant est droit, le parallélisme des tangentes existe toujours, et le point O est alors centre de courbure pour les deux arcs AA' et BB'.

SUR LE CALCUL DES SINUS

(voir t. I, p. 272, 353, t. III, p. 11);

PAR M. BACH,
Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Strasbourg.

La formule de Simpson donne

$$\sin 12.10'' = 2\sin(n-1)10'' - \sin(n-2)10'' - K\sin(n-1)10'',$$
$$K = 2 - 10510'' = 0,000000002350 \ldots$$

Je désigne par $e+\varepsilon$ la valeur exacte du sinus de $10''$, et par e la valeur approchée; il vient

$$\sin 20'' = 2(e+\varepsilon) - K(e+\varepsilon) = 2e - Ke + \varepsilon(2-K),$$

K étant une quantité négligeable par rapport à 2.

Je calcule $2e - Ke$ avec i décimales, i étant jusqu'ici un nombre indéterminé.

Je désigne par e_1 la valeur de $2e - Ke$ calculée avec

i décimales en moins, et par ε_1 l'erreur commise; il vient

$$\sin 20'' = e_1 + \varepsilon_1.$$

ε_1 sera plus petit que $\frac{1}{10^i} + 2\varepsilon$, et si je pose, pour simplifier l'écriture, $\frac{1}{10^i} = \alpha$, on aura

$$\varepsilon_1 < \alpha + 2\varepsilon.$$

On aura ensuite

$$\begin{aligned} \sin 30'' &= 2(e_1 + \varepsilon_1) - e - \varepsilon - \mathrm{K}(e_1 + \varepsilon_1) \\ &= 2e_1 - e - \mathrm{K}e_1 + \varepsilon_1(2 - \mathrm{K}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Je calcule encore $2e_1 - e - \mathrm{K}e_1$ avec i décimales en moins, et je désigne par e_2 cette valeur, par ε_2 l'erreur commise; il vient

$$\sin 30'' = e_2 + \varepsilon_2 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_2 < \alpha + 2\varepsilon_1 - \varepsilon.$$

J'aurai ensuite

$$\begin{aligned} \sin 40'' &= 2(e_2 + \varepsilon_2) - e_1 - \varepsilon_1 - \mathrm{K}(e_2 + \varepsilon_2) \\ &= 2e_2 - e_1 - \mathrm{K}e_2 + \varepsilon_2(2 - \mathrm{K}) - \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Je calcule encore $2e_2 - e_1 - \mathrm{K}e_2$ avec i décimales; je nomme e_3 cette valeur, et ε_3 l'erreur commise, et j'ai

$$\sin 40'' = e_3 + \varepsilon_3 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 < \alpha + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Je continue de la même manière et je suis conduit à écrire la suite des inégalités:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 < \alpha + 2\varepsilon, \\ &\varepsilon_2 < \alpha + 2\varepsilon_1 - \varepsilon, \\ &\varepsilon_3 < \alpha + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1, \\ &\varepsilon_4 < \alpha + 2\varepsilon_3 - \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\varepsilon_{n-1} < \alpha + 2\varepsilon_{n-2} - \varepsilon_{n-3}, \end{aligned}$$

ε_{n-1} étant l'erreur qui affecte $\sin n.10''$.

De ces inégalités on tire facilement les suivantes :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 < \alpha + 2\varepsilon,\\
&\varepsilon_2 < 3\alpha + 3\varepsilon,\\
&\varepsilon_3 < 6\alpha + 4\varepsilon,\\
&\varepsilon_4 < 10\alpha + 5\varepsilon,\\
&\varepsilon_5 < 15\alpha + 6\varepsilon,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les coefficients de ε suivent la série des nombres naturels, les coefficients de α la série des nombres triangulaires; on peut donc écrire

$$\varepsilon_{n-1} < \frac{n(n-1)}{2}\alpha + n\varepsilon;$$

telle sera l'erreur commise sur sin $(n.10'')$, si l'on garde toujours i décimales dans la suite des calculs.

Si l'on s'arrête à 45°, on a

$$45^\circ = 2700' = 10'' \times 16200;$$

faisons $n = 16200$, on a

$$\frac{n(n-1)}{2} = 8100 \times 16200 < 2 \times 10^8.$$

16200 est d'ailleurs plus petit que 2×10^4 et $\varepsilon < \frac{2}{10^{14}}$ (en prenant pour la limite de l'erreur le sixième du cube de l'arc).

Ainsi l'erreur commise sur sin 45° sera plus petite que $\frac{2 \times 10^8}{10^i} + \frac{4 \times 10^4}{10^{14}}$.

Si donc on a commencé et continué le calcul avec 18 décimales, l'erreur finale sera plus petite que $\frac{6}{10^{10}} < \frac{1}{10^9}$; on pourra donc compter sur les 9 premières décimales.

Remarque. Il est bien entendu que pour calculer Ke, Ke_1, etc., on emploiera la multiplication abrégée.

On procéderait de la même manière pour le calcul des cosinus; seulement je ferai remarquer que si l'on a calculé cos 10″ avec 18 décimales, l'erreur relative à ε sera négligeable par rapport à l'erreur relative à α, et l'on pourra encore compter finalement sur 9 bonnes décimales pour le cosinus de 45°.

THÉORÈMES SUR L'INTERSECTION DE TROIS CONIQUES;

PAR M. MÉRAY (CHARLES),
Élève de l'institution Barbet.

Soient trois coniques O, O′, O″, tangentes à deux mêmes droites L, L′ (réelles ou imaginaires) se coupant au point T; de deux points P, Q menons-leur des tangentes; désignons par A, B, A′, B′, A″, B″ les tangentes menées du point P respectivement aux coniques O, O′, O″; désignons de même par C, D, C′, D′, C″, D″ les tangentes menées du point Q. Le quadrilatère formé par les quatre droites A, B, C, D est circonscrit à la conique O, ses sommets sont $\widehat{AC}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$, donc les quatre droites T.$\widehat{AC}$, T.$\widehat{BD}$, T.$\widehat{AD}$, T.$\widehat{BC}$ sont en involution, d'une part avec les droites L, L′, de l'autre avec les droites TP, TQ. Si nous considérons de même le quadrilatère A′, B′, C′, D′, les droites T.$\widehat{A'C'}$, T.$\widehat{B'D'}$, T.$\widehat{A'D'}$, T.$\widehat{B'C'}$ sont en involution, d'une part avec les droites L, L′, de l'autre avec les droites TP, TQ; il en est de même pour le quadrilatère A″, B″, C″, D″. Nous avons donc le théorème suivant, dû à M. Laguerre :

1[er] Théorème. *Quand trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites (réelles ou imaginaires) se coupant en* T; *si de deux points on leur mène des tangentes, ces droites formeront trois quadrilatères circonscrits aux coniques : en joignant le point* T *à trois couples quelconques de sommets opposés, on aura un faisceau en involution.*

Considérons trois coniques O, O′, O″ ayant en commun deux points ε, φ (réels ou imaginaires). Coupons ces coniques par deux droites L, L′; soient a, b, c, d les intersections de la conique O avec les droites L, L′; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'' les intersections des coniques O′, O″ avec les mêmes droites. Le quadrilatère a, b, c, d est inscrit à la conique O; donc les quatre points $\widehat{\varepsilon\varphi, ac}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, bd}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, ad}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, bc}$ sont en involution, d'une part avec les points ε, φ, de l'autre avec les points $\widehat{L, \varepsilon\varphi}$, $\widehat{L', \varepsilon\varphi}$; de même les quatre points $\widehat{\varepsilon\varphi, a'c'}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, b'd'}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, a'd'}$, $\widehat{\varepsilon\varphi, b'c'}$ sont en involution, d'une part avec ε, φ, de l'autre avec $\widehat{L, \varepsilon\varphi}$, $\widehat{L', \varepsilon\varphi}$; il en est de même pour le quadrilatère a'', b'', c'', d''. Nous avons donc le théorème suivant :

2[e] Théorème. *Quand trois coniques passent par les deux mêmes points* ε, φ *(réels ou imaginaires); si on coupe ces coniques par deux droites, on aura trois quadrilatères inscrits : les intersections des côtés opposés avec la corde* $\varepsilon\varphi$ *fourniront six couples de points; trois quelconques de ces couples sont en involution.*

Si les sécantes coïncident, on a le théorème :

3[e] Théorème. *Quand trois coniques passent par deux mêmes points* ε, φ; *si on les coupe par une droite et qu'on mène les tangentes aux points d'intersection, ces tangentes détermineront sur la corde commune six points en involution.*

LIEU DES CENTRES DES CIRCONFÉRENCES COUPANT SOUS DES ANGLES ÉGAUX TROIS CIRCONFÉRENCES DONNÉES;

Par M. A. MANNHEIM,
Lieutenant d'artillerie.

Lemme 1. Deux petits cercles d'une sphère peuvent toujours être considérés comme l'intersection, avec cette sphère, de deux surfaces coniques.

Lemme 2. Tout plan, mené par l'un des sommets de ces surfaces coniques, coupe la sphère suivant un cercle faisant, avec les petits cercles dont nous avons parlé, des angles égaux.

Lemme 3. Trois petits cercles d'une sphère, pris deux à deux, donnent lieu à six surfaces coniques, dont les intersections avec la sphère donnée sont les trois petits cercles.

Lemme 4. Parmi les sommets de ces surfaces coniques, trois sont dans l'intérieur de la sphère, trois à l'extérieur.

Lemme 5. Les trois sommets extérieurs sont en ligne droite; deux sommets intérieurs sont en ligne droite avec un sommet extérieur; ce qui fait quatre droites sur lesquelles sont les six sommets.

Lemme 6. Par une droite donnée on mène des plans; les plans coupent une sphère suivant des cercles; le lieu des sommets des cônes touchant la sphère suivant ces cercles, est une ligne droite.

Lemme 7. Propriétés des projections stéréographiques:

Tout cercle tracé sur la sphère se projette suivant un cercle.

Les projections de deux cercles se coupent sous un angle égal à celui des deux cercles.

Le centre de la projection d'un cercle est la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère.

Ces lemmes posés, considérons trois petits cercles d'une sphère et les surfaces coniques dont les intersections avec cette sphère sont ces petits cercles.

Par l'une des droites des sommets de ces surfaces coniques, menons des plans; ils coupent la sphère suivant des cercles.

D'après le lemme 2, ces cercles font avec les trois petits cercles des angles égaux.

D'après le lemme 6, le lieu des sommets des cônes touchant la sphère suivant ces cercles est une droite.

Projetons stéréographiquement la figure que nous venons d'obtenir, et nous aurons le théorème suivant :

Le lieu des centres des cercles coupant sous des angles égaux trois cercles donnés dans un plan, se compose de quatre droites.

Il y a quatre droites, parce qu'il y a quatre lignes de sommets.

On peut ajouter : les quatre droites qui composent ce lieu passent par un même point; ce point est le centre radical des cercles donnés et ces droites sont perpendiculaires aux droites des sommets.

Nous laissons à chercher la démonstration de cette dernière partie.

Par ce qui précède, on trouvera aussi facilement une démonstration du problème proposé au grand concours d'élémentaires, en 1851 (t. X, p. 318), en remarquant que deux cercles peuvent être considérés comme les projections orthogonales ou stéréographiques de deux sections circulaires d'une surface conique.

Note. Écrivons les équations de trois sphères, en prenant un point d'*égale puissance* pour origine et les axes rectangulaires :

$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma'z+\beta'y+\alpha'x)+f=0,$$
$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma''z+\beta''y+\alpha''x)+f=0,$$
$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma'''z+\beta'''y+\alpha'''x)+f=0;$$

les α, β, γ sont les coordonnées respectives des centres, et

$$\begin{aligned} f &= \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2-r'^2, \\ &= \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2-r''^2, \\ &= \alpha'''^2+\beta'''^2+\gamma'''^2-r'''^2; \end{aligned}$$

les r sont les rayons respectifs des sphères.

Soit une quatrième sphère, rencontrant ces trois sphères sous des angles égaux ; représentons cette sphère par l'équation

$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma z+\beta y+\alpha x)+f'=0, \quad \text{où} \quad f'=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2.$$

Écrivant l'égalité des cosinus des angles sous lesquels cette sphère coupe les trois autres, on obtient les deux équations

$$r''[f+f'-2(\gamma'\gamma+\beta'\beta+\alpha'\alpha)]=r'[f+f'-2(\gamma''\gamma+\beta''\beta+\alpha''\alpha)],$$
$$r'''[f+f'-2(\gamma'\gamma+\beta'\beta+\alpha'\alpha)]=r'[f+f'-2(\gamma'''\gamma+\beta'''\beta+\alpha'''\alpha)].$$

Éliminant $f+f'$, on obtient

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma[\gamma'(r''-r''')+\gamma''(r'''-r')+\gamma'''(r'-r'')] \\ +\beta[\beta'(r''-r''')+\beta''(r'''-r')+\beta'''(r'-r'')] \\ +\alpha[\alpha'(r''-r''')+\alpha''(r'''-r')+\alpha'''(r'-r'')] \end{array}\right\}=0.$$

L'état du problème n'est pas changé, en prenant négativement r', ou r'', ou r''', ou bien deux de ces quantités ; on a donc quatre solutions, et le lieu du centre de la sphère est dans quatre plans ; chaque plan passe par un point quelconque d'égale puissance, et, comme tous ces points sont sur une droite, il s'ensuit que les plans se coupent suivant l'axe radical et sont perpendiculaires au plan des centres. Lorsque quatre sphères sont données, le lieu des centres est un système de seize droites.

Supposons que quatre sphères soient données et qu'il s'agisse de trouver le centre de la sphère qui les rencontre sous un angle nul. Représentons deux plans, lieux des centres, par les équations

$$\text{(1)} \qquad A\alpha+B\beta+C\gamma=0,$$
$$\text{(2)} \qquad A'\alpha+B'\beta+C'\gamma=0.$$

On a, en outre, les deux équations

$$(a) \qquad (\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=(r+r')^2,$$
$$(b) \qquad (\alpha-\alpha'')^2+(\beta-\beta'')^2+(\gamma-\gamma'')^2=(r+r'')^2;$$

ces deux équations donnent

$$(3)\qquad A''\alpha + B''\beta + C''\gamma = 2r(r' - r'') + r'^2 - r''^2,$$
$$A'' = 2(\alpha'' - \alpha'),\quad B'' = 2(\beta'' - \beta'),\quad C'' = 2(\gamma'' - \gamma').$$

Les équations (1), (2), (3) donnent

$$\alpha = Mr + N,\quad \beta = M'r + N',\quad \gamma = M''r + N'';$$

les M, N sont des quantités connues. Substituant ces valeurs dans une des deux équations (a), (b), on obtient une équation du second degré en r. On a ainsi la solution du problème de Fermat sur une sphère qui en touche quatre autres, et aussi la solution du problème de Viète sur un cercle qui en touche trois autres: la marche du raisonnement est la même pour les deux problèmes.

r', r'', r''' étant positifs, la droite des sommets des cônes, tangents aux sphères dont les centres sont dans le plan xy, a pour équation

$$(a)\qquad My - M'x = N,$$
$$M = \alpha'(r'' - r''') + \alpha''[r''' - r'] + \alpha'''[r' - r''],$$
$$N = r''[\alpha'\beta'''] + r'''[\alpha''\beta'] + r'[\alpha'''\beta'],$$

les crochets désignent des binômes alternés; on déduit M′ de M en changeant α en β. Faisant $\gamma = 0$ dans l'équation du plan (A), on a

$$(b)\qquad M\beta + M'\alpha = 0;$$

donc les droites (a) et (b) sont perpendiculaires. Ainsi les traces des quatre plans sur le plan des centres sont respectivement perpendiculaires aux lignes des sommets.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

PAR M. JAUFROID,

Professeur de mathématiques au collége de Cette.

En lisant l'article si intéressant publié par M. Abel Transon sur les fonctions symétriques, dans les cahiers des mois de février et de mars 1850, j'ai cru m'apercevoir d'une erreur. Il y est dit (page 83) « que la nouvelle mé- » thode possède, comme celle de M. Cauchy, l'avantage » de démontrer directement que toute fonction symé-

» trique entière est elle-même une fonction entière des
» coefficients, sans aucun diviseur numérique, etc. »

Cela est inexact; et, en considérant attentivement la méthode, on voit que s'il s'agit d'une fonction symétrique telle que $\text{T}(a^2 b^2)$, chaque terme devra bien s'y trouver répété deux fois, en sorte qu'il faudra diviser par 2 la valeur trouvée; et rien n'indique, pas plus que dans les formules déduites de celles de Newton, que la division se fera exactement. La méthode de M. Cauchy met ce résultat en évidence, justement parce qu'on est obligé de constituer la fonction avec les symboles représentant les racines, et qu'alors on lui donne la forme qui lui convient; on pourrait y laisser subsister les termes semblables, et alors on trouverait une valeur qu'il faudrait ensuite diviser par les facteurs numériques connus, et rien n'indiquerait non plus que cette division dût se faire exactement.

Cependant (page 87) la simplification indiquée pour calculer, par exemple, $\sum a \,.\, b \,.\, \varphi(c)$, conduira à la valeur exacte de cette fonction, parce que la démonstration s'appuie sur la formation de produits analogues au suivant :

$$(x-b)(x-c)\ldots(x-h),$$

dans lequel les coefficients sont des fonctions symétriques à termes non répétés.

Mais il n'en serait plus de même pour la fonction

$$\sum a \,.\, b\, \varphi(c, d),$$

si $\varphi(c, d)$ était de la forme $c^2 d^2$.

Je n'insiste pas davantage; et, malgré cette légère erreur, si vraiment erreur il y a, la méthode indiquée mérite d'être

remarquée par l'économie qu'elle apporte dans des calculs ordinairement si prolixes.

Note. L'observation de M. Jaufroid, très-juste, n'ôte rien à la belle simplicité de la méthode, et dont M. le professeur Dienger a donné un développement dans le journal allemand de Grunnert (1851).

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE M. J. STEINER.

(Journal de M. Crelle, tome XLV, page 177; 1852.)

1. Le point A se meut sur une droite perpendiculaire sur le milieu de BC; le point a se meut de même sur le milieu d'une droite perpendiculaire à bc; les triangles ABC, abc, sont dans un même plan, et l'angle BAC est constamment égal à bac. L'axe radical des deux cercles circonscrits aux deux triangles, a pour enveloppe deux points fixes : l'un correspondant aux mouvements qui ont lieu dans le même sens, et l'autre à ceux qui ont lieu dans des sens opposés.

2. Si une conique doit toucher en quatre points une courbe du quatrième degré, et dans le même plan une courbe de degré n, il y a en général $126\,n\,(n+1)$ solutions.

3. Il existe en général soixante-trois coniques qui touchent une courbe du quatrième degré quelconque en un point *donné*, et encore en trois autres points.

4. Il existe en général sept cent cinquante-six coniques qui ont, avec une courbe du quatrième degré, une osculation du quatrième ordre en un point a, et une osculation simple (du premier ordre) en deux points b, c. Les sept cent cinquante-six points d'osculation a se rangent

par douze en soixante-trois groupes déterminés, et par les douze points de chaque groupe passe une courbe du troisième degré. Quelle relation existe entre les soixante-trois courbes du troisième degré ?

5. Combien y a-t-il de tels points a dans une courbe du quatrième degré, où elle peut avoir avec une conique une osculation du sixième ordre ?

6. Dans une courbe de degré m, combien existe-t-il de points où elle est osculée par une courbe de degré n, suivant une osculation d'ordre $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$?

7. Combien existe-t-il de coniques qui touchent une courbe de degré n en cinq points ?

8. Par un point pris dans le plan d'une ligne de degré n passent $3n(n-1)$ cercles de courbure de la courbe. Si le point est sur la courbe, ce nombre est diminué de deux.

9. Si un cercle doit toucher en deux points une courbe de degré n et passer par un point p pris dans le plan de la courbe, il y a en général $\frac{1}{2}n(n-1)[(n+1)(n+2)-8]$ solutions, et ce nombre est diminué de $n(n+1)-4$ lorsque le point p est sur la courbe.

10. Si un cercle doit passer par deux points donnés et toucher une courbe de degré n, le nombre de solutions est en général $n(n+1)$.

Observation. Ces théorèmes et ces problèmes, seulement énoncés, restent à démontrer et à résoudre.

BIBLIOGRAPHIE.

Soluzione di un problema geometrico piano, della classe de' problemi detta da' geometri greci νευσεων delle inclinazioni eseguita col metodo geometrica degli antichi; *da Rafaeli Minervini.* Napoli, 1849; in-8° de 60 pages, et suivi d'un *aggiunta* de I à XII.

Celui que l'antiquité a surnommé le *grand géomètre*, a composé un ouvrage sur *les inclinaisons*, περι νευσεων, ouvrage perdu, dont Pappus, auteur du IVe siècle, venu un siècle après Apollonius, nous a fait connaître le contenu (*voir* tome III, page 352). Cet ouvrage, divisé en deux livres, renfermait cent vingt-cinq théorèmes et vingt-huit lemmes, qui roulaient sur le moyen de mener des droites remplissant certaines conditions. Pappus cite les cinq problèmes suivants de ce genre :

1. Étant donné un cercle, mener par un point donné dans le plan du cercle, une droite dont la portion interceptée par le cercle soit d'une grandeur donnée.

2 et 3. Par le sommet de l'angle d'un rhombe, mener une droite de manière que la partie interceptée par les côtés de l'angle opposé soit d'une grandeur donnée. Il y a deux cas qui ont été examinés par Newton et qui se trouvent maintenant dans tous les Traités élémentaires.

4. Étant donnés un demi-cercle et une droite perpendiculaire au diamètre, mener par l'extrémité du diamètre une droite telle, que la partie interceptée entre la droite et la demi-circonférence soit donnée de grandeur.

5. Étant donnés deux demi-circonférences avec leurs diamètres ne formant qu'une droite, mener par l'extré-

mité d'un de ces diamètres une droite telle, que la partie interceptée entre les deux demi-circonférences soit donnée de grandeur.

Au XVIIe siècle, un sénateur de Raguse nommé Marin Ghetaldi, a résolu très-élégamment, selon la méthode des anciens, les quatre premiers problèmes, dans un opuscule intitulé : *Apollonius redivivus, seu restituta Apollonii Pergaei inclinationum geometria.* Venet., 1607.

Il n'a pas résolu le cinquième problème, qu'il se contente d'énoncer, et il en donne pour raison que, devant aller en ambassade à Constantinople, il n'avait plus assez de liberté d'esprit pour une question qui *animus requiritur plane solutus et vacuus.* On croit qu'il est mort pendant cette mission, vers 1610.

M. Minervini s'est attaché au cinquième problème et le résout par la méthode grecque; à cet effet il distingue :

1°. Les demi-cercles se touchant extérieurement, trois cas;

2°. Les demi-cercles se touchant intérieurement, trois cas;

3°. Les demi-cercles se coupant, sept cas;

4°. Les demi-cercles ne se coupant pas, un cas.

Dans ce qui précède, on suppose que les demi-cercles sont du même côté par rapport à la ligne des centres. L'auteur reprend les mêmes distinctions lorsque les demi-cercles sont opposés par rapport à cette ligne, et considère encore quinze cas; ainsi, en tout vingt-neuf cas; et le problème est toujours ramené à la construction de deux segments dont on connaît la somme ou la différence, et le rapport géométrique ou le rectangle. La géométrie algorithmique donne immédiatement une solution générale. Soient $f(r, \omega) = 0$ et $F(\rho, \omega) = 0$ les équations polaires de deux courbes planes, et soit d la différence connue de deux rayons vecteurs répondant au même

angle ω; éliminant r, ρ entre les deux équations et la troisième $\rho - r = a$, on obtient la valeur de ω. Dans le cas actuel, prenant pour pôle le point par où doit passer la droite, l'élimination donne tout de suite une équation du second degré, de facile construction et discussion.

Après avoir terminé ce travail, l'auteur apprit que le célèbre Nicolas Fergola, son professeur, avait traité un des cas du problème dans l'ouvrage posthume *Della invenzione geometrica* (1842), et que Samuel Horsley avait publié depuis longtemps (1770) un Mémoire sur la restitution des deux livres d'Apollonius sur les *Inclinaisons* (*). Le géomètre anglais n'emploie pas les mêmes moyens de solution.

Dans une note au bas de la page 4, M. Minervini dit que le texte grec de Pappus où se trouvent les problèmes énoncés, est extrêmement corrompu et mutilé, ce qui rend inintelligible la traduction latine de Frédéric Commandin, faite *littéralement*. Il n'en est pas ainsi du manuscrit de la Bibliothèque impériale portant le n° 2368 (collect. de Mesmes, 543). A l'endroit cité, le texte est très-exact et complet (**). En voici la copie :

Θέσει δεδομένων ἡμικυκλίου τε καὶ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἢ δύο ἡμικυκλίων ἐπ' εὐθείας ἐχόντων τὰς βάσεις, θεῖναι δοθεῖσαν τῷ μεγέθει εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν νεύουσαν ἐπὶ γωνίαν ἡμικυκλίου.

La traduction *littérale* française est :

Étant donnés de position un demi-cercle et une droite élevée perpendiculairement sur le diamètre, OU BIEN *deux demi-cercles ayant leurs diamètres sur la même droite, mener une droite donnée de grandeur entre les deux lignes et se dirigeant vers le coin du demi-cercle.*

(*) Ce Mémoire a été traduit en allemand par Diesterweg. Berlin, 1823; in-8°. Il y a aussi une restitution de Reuben Burrow.

(**) On lit à la fin du manuscrit, qu'il a été écrit par un nommé Nancilius, à Paris, en 1562, pour le célèbre P. Ramus; le mot Nancilius est suivi du surnom Τρκχυνῖοσ dont la signification est inconnue.

Pappus a réuni dans un seul énoncé deux problèmes, et les mots *entre les deux lignes* signifient *entre le cercle et la perpendiculaire* dans le premier problème, et entre les deux demi-cercles dans le deuxième problème. *Le coin du demi-cercle*, c'est le point où la ligne des diamètres coupe le demi-cercle. Voici maintenant la traduction de Commandin :

Positione dato semicirculo, et recta linea, ad rectos angulos basi sit duorum semicirculorum in directum bases habentium inter duas lineas ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat (page 249) (*).

La faute de cette traduction inintelligible provient de ce que le manuscrit donne ἢ au lieu de ἡ, qui est évidemment la vraie leçon; et de deux problèmes on a fait un seul problème.

C'est par une semblable correction que M. Vincent a expliqué d'une manière si heureuse la locution : *quantité donnée qu'en raison* (tome III, page 9).

Pappus contient huit livres; les deux premiers manquent; il n'y a de publié du texte que l'ouvrage suivant : Παππου Συναγωγαὶ : *Pappi Alexandrini Collectiones mathematicæ nunc primum græce edidit Hermannus-Josephus Eisenmann in regia pont. et viar. mechan. prof. Libri quinti pars altera.* Parisiis, MDCCCXIV, ex typis J. Didot aîné; in-fol. de 56 pages, fig. dans le texte.

Dans la préface, on lit que la publication de tout l'ouvrage est prête à paraître. L'auteur est mort, et rien n'a paru. Lorsque nous dépensons tant d'argent pour faire copier au loin des inscriptions énigmatiques plus ou moins heureusement déchiffrées et devinées; tant d'argent pour reproduire des lais, des cantilènes, des complaintes du

(*) Pappi Alexandrini *Mathematicæ Collectiones*. Bononiæ, 1660.

moyen âge, ne serait-il pas convenable de consacrer quelques sommes à la publication du seul texte qui résume les travaux de tous les géomètres grecs, et qui renferme tant de théorèmes fondamentaux, texte dont la Bibliothèque impériale possède plusieurs exemplaires ! Il est de la dignité, je dirai plus, il est du devoir des deux Académies, celle des Sciences et celle des Inscriptions, de solliciter l'intervention du Gouvernement pour une telle œuvre.

A qui la confier ? La réponse est facile : à un géomètre helléniste. Or, la dernière Académie citée possède un ancien professeur qui s'est distingué dans l'enseignement ; qui a fait des travaux mathématiques remarquables, publié des Mémoires de philologie et d'archéologie musicale dénotant une profonde connaissance de l'idiome grec, une expérience consommée dans la lecture des manuscrits, une grande perspicacité pour éclaircir des points épineux, remplir des lacunes, restaurer des passages défectueux, qualités indispensables dans un éditeur consciencieux. Letronne n'en aurait pas désigné d'autre pour nous rendre Proclus, texte accompagné d'une traduction française ; car la traduction latine de Commandin est insuffisante dès qu'il s'agit de recherches approfondies (*). Ainsi nous avons les matériaux, nous avons l'architecte : que nous manque-t-il pour l'exécution ? le *vouloir*. Hélas ! il manquera encore longtemps, comme pour tout ce qui ne tombe pas dans le domaine de la vulgarité littéraire ou dans les cotes de la Bourse.

(*) Il est juste de remarquer que cette traduction a paru en 1588, à Pise, treize ans après la mort de l'auteur ; la deuxième édition est de Venise, 1589 ; et la troisième, qui est la meilleure, à Bologne, 1660. Commandin ne voulait pas correspondre avec le savant Dasypodius, de Strasbourg, *perciocche*, dit-il, *non giudico bene l'uomo catolico, il contaminarsi con l'amicizia di persona imbrattata e lorda d'el fango dell' Eresie*. Ce zèle religieux n'a pas empêché le célèbre traducteur de s'adonner, dans un âge avancé, à des plaisirs peu religieux qui ont abrégé ses jours. Il est mort à soixante-six ans.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR EISENMANN (*).

Eisenmann (Armand-Joseph) (*) est né à Haaslach sur la Kinzig, pays de Fürstenberg, en Souabe, le 22 décembre 1758. Nommé élève de l'Ecole des Ponts et Chaussées le 29 brumaire an III, il fut choisi, le 27 frimaire même année, pour être à la tête du bureau des vingt-cinq dessinateurs que l'on devait établir pour l'École centrale Polytechnique. Le 23 nivôse suivant, une nouvelle décision le comprit parmi les vingt-cinq géographes chargés de la levée des plans et cartes du département de Paris. Le 4 thermidor an IV, il obtint le grade d'ingénieur ordinaire des Ponts et Chaussées.

Nommé, en l'an V, instructeur d'analyse à l'École des Ponts et Chaussées, en remplacement de Clément, puis chargé du cours de Mécanique appliquée, Eisenmann est resté attaché comme professeur à cette École. Homme voué à l'étude et aux patientes recherches, on le trouve plus tard (1819) chargé spécialement de faire des traductions ou des extraits des ouvrages et des Mémoires les plus remarquables publiés dans diverses langues, et relatifs aux objets qui peuvent intéresser l'art de l'ingénieur. Il était alors suppléé dans son cours par Navier.

Je n'ai rien pu trouver des travaux d'Eisenmann depuis le commencement de sa carrière d'ingénieur jusqu'au moment où la retraite vint l'atteindre dans sa modeste position (1830). On découvrit alors qu'il avait été religieux et jouissait d'une petite pension ecclésiastique de 267 francs, accordée par état de la liquidation générale du mois de thermidor an XII.

(*) Nous la devons au savant M. Breton (de Champ), ingénieur des Ponts et Chaussées.

(**) Le nom est Hermann; peut-être qu'on a voulu franciser ce nom.

Dépourvu de fortune personnelle, et n'ayant pu qu'à grand'peine obtenir de cumuler sa pension ecclésiastique avec celle que lui assuraient ses services, Eisenmann est néanmoins resté à Paris, où il est mort le 26 février 1838.

Ce savant, qui a laissé si peu de traces, était instruit dans les langues anciennes et modernes de l'Europe. Avant d'être nommé instituteur à l'École des Ponts et Chaussées, il avait travaillé à une édition de la *Dynamique* de d'Alembert. M. Poncelet le cite comme s'étant occupé d'une traduction des Collections mathématiques de Pappus (introduction du *Traité des Propriétés projectives des figures*, dans une note). Toutefois, on a seulement de lui l'édition d'une partie du Ve livre, sans traduction.

Eisenmann est un de ces êtres que le défaut de fortune a empêchés de réaliser les projets qu'ils avaient conçus. S'il eût été dans l'aisance, nous aurions une magnifique édition de ces Collections mathématiques encore inédites !

Note. On a imprimé législativement, aux frais de la nation, les OEuvres de Laplace, en y laissant subsister, sans en avertir, des fautes de calcul anciennes par devoir de conscience, et en laissant introduire quelques nouvelles fautes, on ne sait par quel genre de devoirs (voir *Comptes rendus* 1849, 2e sem., page 22). On n'édite pas un auteur en le daguerréotypant.

On doit imprimer législativement, aux frais de la nation, et on n'imprimera pas, les œuvres de Fermat ; ce qui n'est pas à regretter, d'après ce qu'on vient de voir. Donnons Proclus à un savant digne de confiance, responsable, et bien rémunéré. Les besognes gratuites sont chères. Tm.

SOLUTION DE LA QUESTION 128

(voir t. V, p. 448) ;

Par M. E. COUPY,

Professeur au Collége militaire.

Quelle est la formule qui donne tous les quantièmes

d'années dans lesquelles le mois de février a cinq dimanches?

Solution. Il est évident que les annécs demandées sont bissextiles, et que le 1er février doit y être le dimanche; d'ailleurs, quand le 1er février est un dimanche, le 1er janvier est un jeudi. La question est donc ramenée à la suivante:

Quelles sont les années bissextiles commençant par un jeudi?

1. Je résoudrai d'abord la question pour le calendrier julien, ce qui est beaucoup plus simple; et je passerai ensuite au calendrier grégorien. On sait que dans le calendrier julien, les dates de l'année reviennent périodiquement aux mêmes jours de la semaine, après une période de vingt-huit ans, dite *cycle solaire*. Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé dans ce calendrier une année répondant à la question, et soit A le millésime de cette année; il est clair que $A + 28n$, n étant un entier quelconque positif ou négatif, répondra à la question. Il faut prouver qu'entre A et $A + 28$, il ne s'en trouve aucune de bissextile commençant par un jeudi; or le jour de la semaine qui commence l'année, avance de 5 rangs en 4 ans, ou de $5x$ rangs en $4x$ années, et la plus petite valeur de x qui rendra $5x$ multiple de 7, est évidemment $x = 7$. Ce sera donc seulement après $4{,}7 = 28$ ans, que l'année bissextile commencera par le même jour de la semaine que la bissextile A. Donc enfin $A + 28n$ est la formule demandée; reste à déterminer la constante A.

Je remarquerai d'abord que les jours de la semaine se correspondent aux dates prises dans les deux calendriers, julien et grégorien; car Grégoire XIII, par son ordonnance de 1582, fit dater vendredi 15 octobre, le lendemain du jeudi 4 octobre; l'accord des jours de la semaine a donc

continué à régner dans les deux calendriers. Or, on sait que l'année julienne est maintenant en retard de 12 jours sur la nôtre; le 1er janvier 1851 a donc été, dans ce calendrier, le même jour que notre 13 janvier, c'est-à-dire un lundi; partant de là, il est facile de trouver que l'année julienne bissextile 1876 commencera par un jeudi, donc $1876 + 28n$ est la formule cherchée; mais 1876 est un multiple de 28, ce qui réduit simplement à $28n$ la formule demandée.

2. Résolvons maintenant la question pour le calendrier grégorien. Supposons encore que, par un moyen quelconque, on ait pu déterminer dans ce calendrier la date B d'une année répondant à la question. J'appellerai *années grégoriennes*, les années séculaires qui ne sont pas bissextiles. Cela étant, il est clair que $B + 28n$, n étant entier positif, sera encore une date convenable, pourvu que $B + 28n$ pour la valeur donnée à n, ne passe pas par-dessus une ou plusieurs années grégoriennes; s'il en était autrement, voyons quelle correction devrait subir la formule. Dans le calendrier julien, le jour de la semaine qui commence l'année avance, avons-nous dit, de $5x$ rangs en $4x$ années; mais, si nous passons par une année grégorienne, il n'avancera plus que de $(5x - 1)$ rangs; expression qui est un multiple de 7 pour $x = 3$, ou $x = 10$. Or $x = 3$ donnerait $4x = 12$, et ce nombre < 28, doit être rejeté comme on verra plus loin; reste donc seulement $x = 10$, d'où $4x = 40$. Donc quand on passera sur une grégorienne, il faudra augmenter de 40 ans, au lieu de 28, la date qui répondait à la question, pour avoir la date immédiatement suivante qui y répond aussi; et comme $40 = 28 + 12$, il faudra donc augmenter $B + 28n$ d'autant de fois 12 qu'il y aura de grégoriennes depuis B. Avant d'établir la formule, cherchons la constante B. Comme le calendrier grégorien ne date que de 1582, je

la chercherai dans le XVIIe siècle. Or on sait (*voir* FRANCOEUR, *Uranographie*, page 111) que le 1er mars 1600 était un mercredi; donc, comme l'année était bissextile, le 1er janvier 1600 était un samedi, d'où il est facile de conclure que le 1er janvier 1604 était un jeudi. On peut donc prendre pour B la valeur $B = 1604$, et par conséquent $1604 + 28n$; n étant égal à 1, 2, 3, c'est-à-dire 1632, 1660, 1688, répondent à la question; mais ensuite 28 années ajoutées à 1688, faisant passer sur la grégorienne 1700, il faut ajouter 40 à 1688, ce qui donne 1728; puis ensuite on aura 1756, 1784, puis $1784 + 40 = 1824$, parce qu'on passe la grégorienne 1800; et ainsi de suite.

Ainsi on peut former facilement le tableau suivant des années répondant à la question :

1604	1728	1824	1920	2004	etc.
1632	1756	1852	1948	2032	
1660	1784	1880	1976	2060	
1688				2088	

l'année $2004 = 1976 + 28$, parce que 2010 n'est pas grégorienne. Arrivé à la cinquième colonne de ce tableau, il est facile de le prolonger indéfiniment, d'après la loi que nous avons indiquée, ou, plus simplement, en se rappelant que dans le calendrier grégorien, après 400 années, la date de l'année répond au même jour de la semaine, car

$$365 \times 400 + 97 = 146097 \text{ jours} = \text{exactement } 20871 \text{ semaines};$$

aussi retrouvons-nous, pour les dates de la cinquième colonne, les dates de la première augmentées chacune de 400 ans; de même, les dates de la sixième colonne seraient celles de la deuxième augmentées de 400 ans, c'est-à-dire 2128, 2156, 2184, et ainsi de suite. Nous voyons aussi,

par ce tableau, que 1604 est la première année, depuis l'établissement du calendrier grégorien, qui réponde à la question. On voit aussi, par ce tableau, pourquoi on doit exclure $4x = 12$, car 12 ajouté à 1688, ou à 1784, ou à 1880, ou enfin à 1976, ne fait passer par-dessus aucune année grégorienne. Enfin, on voit encore, par ce tableau, qu'il n'y a que 3 années par siècle, répondant à la question, excepté dans le siècle contenant la séculaire bissextile qui en renferme 4, ce qui fait 13 ans en quatre siècles. Dans le calendrier julien, elles reviennent périodiquement tous les 28 ans, et il y en a 14 dans le même laps de temps.

3. Il résulte des considérations précédentes, que la formule demandée est

$$z = 1604 + 28n + 12p.$$

Il est facile de voir que tant que n est inférieur à 4, p est nul.

Faisons $n - 3 = 13m + r$; nous aurons

$$z = 1604 + 28n + 12(3m + \mathrm{R}).$$

R dépend de r de la manière suivante :

r	R,
ne dépasse pas 3	1,
dépasse 3 et ne dépasse pas 6	2,
dépasse 6	3.

C'est ce qu'on voit en donnant à n, successivement, les 13 valeurs de la suite $4, 5, 6, \ldots, 16$; et K étant un de ces nombres, la valeur de R revient la même pour les valeurs de $n = \mathrm{K} + 13$.

Exemple. Faisons $n = 8$, $n - 3 = 5$, $m = 0$, $r = 5$, $\mathrm{R} = 2$; donc,

$$z = 1604 + 28.8 + 12.2 = 1852.$$

Cette formule convient tant que le calendrier grégorien n'aura pas besoin de correction.

Note. Les formules de M. Gauss, pour calculer les trois pâques, julienne, grégorienne, judaïque, n'ont pas encore été démontrées en France; beau sujet d'une thèse à soutenir. TM.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MALFATTI, DANS LE TRIANGLE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE

(voir t. V, p. 60; t. VI, p. 346; t. VIII, p. 62);

PAR M. SCHELLBACH,
Professeur à Berlin.

(Journal de M. Crelle, t. XLV, p. 91 et p. 187; 1852.)

Triangle rectiligne.

1. Soient ABC le triangle donné, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $2s = a + b + c$; L le centre d'un des cercles cherchés, LM la perpendiculaire abaissée de L sur BC, K le centre d'un second des cercles cherchés, KH la perpendiculaire abaissée de K sur BC, $BM = y$, $CH = z$; nommons x la distance d'un des points de contact du troisième cercle au sommet A; faisons

$$a = s\sin^2\varphi,\quad b = s\sin^2\chi,\quad c = s\sin^2\psi;$$

φ, ψ, χ sont des angles connus et constructibles; et l'on aura

$$x = s.\sin^2(\sigma - \varphi),\quad y = s.\sin^2(\sigma - \chi),\quad z = s.\sin^2(\sigma - \psi),$$

où

$$2\sigma = \varphi + \chi + \psi.$$

Démonstration.

$$LM = y\tang\frac{1}{2}\beta,\quad KH = z\tang\frac{1}{2}\gamma;$$

donc

$$KL = y \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta + z \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma, \quad HM = a - y - z,$$

$$\left(y \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta + z \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma\right)^2 = (a - y - z)^2$$
$$+ \left(z \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma - y \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta\right)^2,$$

d'où

$$y + z + 2\sqrt{yz \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma} = a,$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s.(s-b)}}, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s.(s-c)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = 1 - \frac{a}{s} = \cos^2\varphi;$$

donc

(1) $$y + z + 2\sqrt{(yz)}.\cos\varphi = s\sin^2\varphi,$$

(2) $$z + x + 2\sqrt{zx}.\cos\chi = s\sin^2\chi,$$

(3) $$x + y + 2\sqrt{xy}.\cos\psi = s\sin^2\psi;$$

les deux dernières équations s'obtiennent comme la première.

Dans un cercle de diamètre 1, construisons un triangle ayant pour angles $\sigma - \chi$, $\sigma - \psi$, $\pi - \varphi$; les côtés de ce triangle sont $\sin(\sigma - \chi)$, $\sin(\sigma - \psi)$ et $\sin\varphi$, et l'on a

$$\sin^2\varphi = \sin^2(\sigma - \psi) + \sin^2(\sigma + \chi) + 2\sin(\sigma - \psi)\sin(\sigma - \chi)\cos\varphi,$$

et deux équations semblables pour $\sin^2\chi$, $\sin^2\psi$.

Donc, si l'on prend

$$x = s.\sin^2(\sigma - \varphi), \quad y = s.\sin^2(\sigma - \chi), \quad z = s.\sin^2(\sigma - \psi),$$

les trois équations (1), (2), (3) sont satisfaites. C. Q. F. D.

Construction. Prolongeons CB en F jusqu'à ce qu'on ait $CF = s$; sur CF comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; portons de C en B, sur le côté CB,

CD $= a$ et CE $= b$; prenons, sur la demi-circonférence, les points D′, E′, B′ perpendiculairement au-dessus de D, E, B; puis l'arc B′G, vers F, égal à l'arc D′E′; de sorte que les points soient disposés dans cet ordre : C, D′, E′, B′, G, F. Prenons encore le milieu H′ de l'arc CD′E′G; si nous abaissons de H′ la perpendiculaire H′H sur CB, le point H sera le point de contact du cercle qui est dans l'angle C. On trouve de même les deux autres points de contact.

Triangle sphérique.

2. LMN est un triangle sphérique; l, m, n étant les côtés respectivement opposés aux angles, sont trois quantités connues; λ, μ, ν, sont les distances sphériques des points de contact des cercles inscrits dans les angles L, M, N, aux sommets de ces angles; trois quantités inconnues.

Faisons

$$l + m + n = 4s, \quad l - s = a, \quad m - s = b, \quad n - s = c,$$
$$s - \lambda = x, \quad s - \mu = y, \quad s - \nu = z;$$

ainsi, $a + b + c = s$.

On obtient facilement l'équation suivante (*voir* plus loin)

$$\frac{\cos a \cos y \cos z}{\cos s} - \frac{\sin a \sin y \sin z}{\sin s} = 1. \tag{1}$$

Si l'on tire la valeur de α de l'équation

$$\frac{\cos \alpha \cos b \cos c}{\cos s} + \frac{\sin \alpha \sin b \sin c}{\sin s} = 1, \tag{2}$$

alors les valeurs de y et z sont données par les équa-

tions

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(y+z) = \dfrac{\cos\left[s+\frac{1}{2}(\alpha-a)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+a)}, \\[2ex] \cos(y-z) = \dfrac{\cos\left[s-\frac{1}{2}(\alpha-a)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+a)}. \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (2), on pose

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cot s;$$

on trouve alors

$$(5)\qquad \cos(\alpha-\varphi) = \frac{\cos s \cos\varphi}{\cos b \cos c}.$$

On peut *construire* les équations (3), (4), (5) à l'aide de triangles sphériques rectangles.

Une permutation convenable entre les lettres fournit encore deux autres équations analogues aux équations (1) et (2); dans cette solution, s peut représenter un arc quelconque.

3. *Calcul de l'équation* (1) (*).

OO′ étant la ligne des centres de deux petits cercles de rayon r et r', faisons $OO' = p$; nous aurons

$$\begin{aligned} \cos p &= \sin r \sin r' + \cos r \cos r' \cos(l-\mu-\nu) \\ &= \cos r \cos r' - \sin r \sin r', \end{aligned}$$

puisque $p = r + r'$.

De là on tire

$$\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r' = \sin^2 \frac{1}{2}(l-\mu-\nu);$$

(*) Par M. H. Faure, lieutenant d'artillerie.

d'un autre côté,

$$\operatorname{tang} r = \sin \mu \operatorname{tang} \frac{1}{2} M,$$

$$\operatorname{tang} r' = \sin \nu \operatorname{tang} \frac{1}{2} N,$$

d'où

$$\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r' = \sin \mu \sin \nu \operatorname{tang} \frac{1}{2} M \operatorname{tang} \frac{1}{2} N$$
$$= \frac{\sin \mu \sin \nu \sin (2s - l)}{\sin 2s},$$

d'après le principe de Neper. On a donc

$$\sin^2 \frac{1}{2}(l - \mu - \nu) = \frac{\sin \mu \sin \nu \sin (2s - l)}{\sin 2s}$$
$$= \frac{1}{2}[1 - \cos (l - \mu - \nu)].$$

Décomposant le produit $\sin \mu \sin \nu$ en sommes, on obtient

$$\cos (\mu - \nu) \sin (2s - l) - \sin 2s = \cos (\mu + \nu) \sin (2s - l)$$
$$- \sin 2s \cos (l - \mu - \nu);$$

le second membre se décompose ainsi,

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sin (2s + \mu + \nu) + \sin (2s - l - \mu - \nu) \\ - \sin (2s + l - \mu - \nu) - \sin (2s + \mu + \nu) \end{bmatrix}$$
$$= - \sin l \cos (2s - \mu - \nu);$$

donc

$$\sin 2s = \cos (\mu - \nu) \sin (2s - l) + \sin l \cos (2s - \mu - \nu),$$

ou bien

$$\sin 2s = \cos (y - z) \sin (s - a) + \sin (s + a) \cos (y + z).$$

Or, évidemment

$$2 \sin 2s = [\sin (s + a) + \sin (s - a)][\cos (y - z) + \cos (y + z)]$$
$$- [\sin (s + a) - \sin (s - a)][\cos (y - z) - \cos (y + z)],$$

d'où

$$\sin s \cos s = \sin s \cos a \cos y \cos z - \cos s \sin a \sin y \sin z,$$

ou

$$1 = \frac{\cos a \cos y \cos z}{\cos s} - \frac{\sin a \sin y \sin z}{\sin s}.$$

Malfatti (Jean-François) est né en 1731, d'une famille noble, à Ala, petite ville du Tyrol, près de Roveredo; il étudia les belles-lettres à Trente et à Vérone et se rendit de là à Bologne, pour se perfectionner dans les sciences et particulièrement dans les mathématiques. Il y fit de rapides progrès, et, lors du rétablissement de l'université de Ferrare, il fut nommé professeur. Là, il acquit une grande réputation par la solution de plusieurs problèmes difficiles, et surtout par le problème sur les pressions qu'un poids exerce sur les appuis qui le soutiennent. Un des premiers membres de la Société italienne fondée par Lorgna, il a inséré divers Mémoires dans le recueil publié par cette Société et est mort en 1807. Son nom est attaché au problème ci-dessus, dont il a le premier donné une solution analytique, sans démonstration; ses formules, que des géomètres distingués ont en vain cherché de retrouver, n'ont été démontrées que depuis peu d'années (*).

SUR L'EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LEGENDRE ET D'UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR GÖPEL.

Legendre a démontré que, A étant un nombre premier de la forme $\dot{4}+1$, si l'on réduit en fraction continue

---

(*) Nous regrettons de n'être pas autorisé à nommer la bienveillante personne qui nous a procuré ce renseignement.

$\sqrt{A}$, la période symétrique des dénominateurs a deux termes moyens égaux. Si les quotients *complets* correspondants sont

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

on a

$$D = D' \quad \text{et} \quad A = I'^2 + D^2;$$

ce qui démontre, en même temps, le théorème de Fermat, que tout nombre premier de la forme $\dot{4}+1$ est décomposable en deux carrés (page 45).

Göpel, dans une Dissertation soutenue en mars 1835, pour obtenir le grade de docteur à l'université de Berlin, et sous le titre : *De æquationibus secundi gradus indeterminatis*, démontre les théorèmes suivants :

a. A étant un nombre premier de la forme $\dot{4}+3$ *ou le double d'un tel nombre premier; réduisant* $\sqrt{A}$ *en fraction continue, on parvient à ces trois quotients complets,*

$$\frac{\sqrt{A}+I'}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}-I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

dans lesquels D *est égal soit à* $\frac{1}{2}D^0$, *soit à* $\frac{1}{2}D'$, *soit à* $\frac{1}{2}(D^0+D')$; *dans les deux premiers cas, on a*

$$A = I^2 + 2D^2,$$

et dans le troisième cas,

$$A = \frac{1}{4}(I-I')^2 + 2D^2 = \frac{1}{16}(D^0-D')^2 + 2D^2,$$

où $I - I'$ *est toujours divisible par* 2, *et* $D^0 - D'$ *divisible par* 4.

b. A étant un nombre premier de la forme $\dot{8}+7$ *ou*

le double d'un tel nombre premier, si l'on réduit $\sqrt{A}$ *en fraction continue, on parvient à deux quotients complets consécutifs :*

$$\frac{\sqrt{A}+I^{o}}{D^{o}}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D} \quad \text{ou} \quad D+D^{o}=2I,$$

et

$$A=2I^{2}-\frac{1}{4}(D-D^{o})^{2} \quad \text{et} \quad D-D^{o}$$

est toujours pair.

Ainsi, en résumé, tout nombre premier est, ou la somme de deux carrés, ou la somme d'un carré plus le double d'un carré, ou bien encore le double d'un carré moins un carré. Mais lorsqu'un nombre premier est la somme de deux carrés, il est nécessairement de la forme $\dot{4}+1$; cette réciproque ne subsiste pas pour les autres nombres premiers.

Adolphe Göpel est né à Rostock en septembre 1812; son père, Saxon d'origine, était professeur de musique. Un oncle maternel, consul anglais en Corse, fit venir Göpel, à l'âge de dix ans, en Italie. L'oncle apprit à son neveu les premiers éléments des sciences, et, pendant un séjour à Pise, en 1825 et 1826, Göpel fréquenta l'université, et suivit les cours d'analyse, de mécanique et de calcul différentiel; en 1827, de retour à Rostock, après avoir été deux années au gymnase de cette ville, il vint à l'université de Berlin. Il saisit avec ardeur l'occasion d'acquérir des connaissances variées, et, outre les cours de mathématiques, de physique et de chimie, il suivit encore les cours de philosophie, de philologie, d'esthétique et d'histoire. Ce n'est qu'à la fin de ses études universitaires, qu'il se livra spécialement aux mathématiques, principalement à cette partie vers laquelle sont entraînés ceux qui

sont appelés à *cultiver la science pure,* à la théorie des nombres. Après sa thèse, en 1835, durant douze années il n'a rien publié, à l'exception de quelques articles dans le Journal de Grunnert, publié à Greisswalde, et dont il corrigeait les épreuves. Dans un de ces articles il démontre que si, dans l'équation

$$\left(\frac{x+\sqrt{y}}{p}\right)^n = \mathrm{P} + \sqrt{\mathrm{Q}},$$

où x, y, n, p, P, Q sont des nombres entiers, p est différent de l'unité, et si x, y, p n'ont pas de diviseur commun, on a toujours $p=2$, $n=3$, ou un multiple de 3. Il était aussi familiarisé avec la méthode synthétique de Steiner.

Dans le tome XXXVI de Crelle (page 317), 1848, on trouve un Mémoire posthume (1844) de Göpel, sur la projectivité des sections coniques comme figures courbes, selon la méthode dite *synthétique*. Peu de temps avant sa mort, il remit à M. Crelle, en mars 1847, un Mémoire sur les fonctions abéliennes : *Theoriæ transcendentium abelianarum primi ordinis adumbratio levis* (*); là, il résout un des problèmes les plus importants de la science contemporaine, et trouve la forme explicite des fonctions inverses.

Supposons qu'on donne les deux équations différentielles,

$$\int \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}} + \int \frac{(\alpha+\beta y')\,dy'}{\sqrt{\mathrm{Y}'}} = v,$$

$$\int \frac{(\alpha'+\beta' y)\,dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}} + \int \frac{(\alpha'+\beta' y')\,dy'}{\sqrt{\mathrm{Y}'}} = v',$$

où Y et Y' sont des fonctions entières des variables y et y' du cinquième degré; il s'agit de trouver y et y'. C'est ce

(*) Inséré dans le Journal de M. Crelle, t. XXXV, p. 277; 1847.

dernier travail posthume qui a attiré l'attention de Jacobi, qui fait un grand éloge de l'ouvrage et de l'auteur (*).

Göpel, ayant un modeste emploi à la Bibliothèque de Berlin, menait une vie très-retirée, très-méditative, et cultivait la musique théorique ainsi que la musique pratique, dans laquelle il avait acquis un notable talent d'exécution; ce qui n'est pas rare chez les géomètres : la musique est, pour ainsi dire, l'arithmologie de l'oreille, et l'on comprend l'enthousiasme qu'inspirait cet art divin aux philosophes de l'antiquité hellénique. Göpel étant peu visiteur, nous voyons pourquoi sa thèse si remarquable est restée presque ignorée des grands géomètres de Berlin. Nous donnons ceci comme une explication, et non comme une excuse. Lorsqu'on découvre une étincelle du feu sacré chez un jeune homme, il faut aller au-devant de lui, et ne pas attendre qu'il vienne. C'est contraire à l'étiquette, j'en conviens, mais conforme à la morale, qui prime toute étiquette. Göpel est le cinquième arithmologue de ce siècle que la mort ait moissonné dans la force de l'âge et du talent. Galois, Abel, Göpel, Jacobi, Eisenstein se sont succédé dans la tombe. Göpel est mort en septembre 1847; sa Dissertation inaugurale est insérée dans le Journal de Crelle, tome XLV, pages 1-14, 1852; et, selon l'usage adopté en Allemagne, Göpel y donne son *curriculum vitæ,* d'où la Notice précédente est tirée : excellent usage, qui devrait être prescrit en France; ce serait un document souvent indispensable pour l'histoire littéraire.

(*) Journal de M. Crelle, t. XXXV, p. 316; 1847.

DÉMONSTRATION

De la proposition qu'une courbe du $n^{ième}$ degré a, en général, $\frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR C.-G.-J. JACOBI.

[Journal de M. Crelle, tome XL, page 237; 1850 (*)].

1. *Notation.* U étant une fonction rationnelle entière algébrique de degré p, U_i représente la somme de tous les termes de degré $p-i$, de sorte que l'on a

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_p,$$

où U_0 est de degré p, U_1 de degré $p-1$, et ainsi de suite.

2. *Lemme.* A étant une fonction rationnelle entière égale au produit des deux autres fonctions rationnelles entières B et C, de sorte que $A = BC$; toute fonction rationnelle entière qui divise A sans avoir de facteur commun avec B, divise nécessairement l'autre facteur C.

3. THÉORÈME. *$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant des fonctions rationnelles algébriques entières en x et y, des degrés marqués par $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_m$, quantités en progression arithmétique; si l'on a l'équation*

$$\alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m = 0,$$

l'équation de condition, nécessaire pour que cette équation ait deux racines égales en h, monte à un degré marqué par $(m-1)(B_0 + B_m)$.

Démonstration. Soient $h_1, h_2, \ldots, h_m$ les racines; l'équation de condition pour l'existence de deux racines

(*) Voir *Nouvelles Annales*, tome IX, page 295.

égales est

$$\Pi (h_i - h_k)^2 = 0,$$

en désignant ainsi le carré du produit de la différence des racines. Cette fonction rationnelle symétrique des racines peut s'exprimer par une fonction rationnelle entière des quantités

$$\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}, \quad \frac{\alpha_{m-2}}{\alpha_m}, \ldots, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_m}.$$

Soit α_m^{-p} la plus haute puissance négative de α_m qu'on rencontre dans cette fonction ; en multipliant cette fonction par α_m^p, on obtient une fonction *entière rationnelle homogène* des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et de degré p ; désignons cette dernière fonction par

$$\Delta (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

nous aurons

$$\Delta (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_m^p \Pi (h_i - h_k)^2.$$

Cette fonction Δ n'est divisible par aucun des coefficients $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; car, si cette divisibilité existait, il s'ensuivrait qu'en égalant le coefficient diviseur à zéro, Δ s'annulerait et l'équation aurait alors des racines égales, ce qui n'est pas nécessairement vrai. Il s'agit maintenant de trouver la valeur de p ; à cet effet, considérons l'équation suivante réciproque de l'équation donnée

$$\alpha_m + \alpha_{m-1} g + \alpha_{m-2} g^2 + \ldots + \alpha_0 g^m = 0 ;$$

désignons les racines par $g_1, g_2, \ldots, g_m$, de sorte que

$$g_i = \frac{1}{h_i} ;$$

on a donc

$$\Delta (\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0) = \alpha_0^p \Pi (g_i - g_k)^2 = \alpha_0^p \Pi \frac{(h_i - h_k)^2}{h_i^2 h_k^2}.$$

Le produit Π renferme $\frac{1}{2}m(m-1)$ facteurs, et le dénominateur de Π est égal au produit de toutes les racines, $h_1, \ldots, h_m$ élevé à la puissance $(2m-2)$; donc ce dénominateur est égal à $\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_m}\right)^{2m-2}$.

Donc

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0) = \alpha_0^{p-2m+2}\alpha_m^{2m-2}\Pi(h_i - h_k)^2$$

$$= \frac{\alpha_0^{p-2m+2}}{\alpha_m^{p-2m+2}}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m);$$

or, nous avons vu qu'aucune des fonctions Δ n'est divisible par l'un des $m+1$ coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$; il faut donc que l'on ait

$$p = 2m - 2.$$

On a donc la valeur cherchée de p, et il vient

$$(1) \qquad \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_m^{2m-2}\Pi(h_i - h_k)^2$$

et

$$\Delta(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) = \Delta(\alpha_m, \ldots, \alpha_0);$$

ainsi Δ est une fonction entière *homogène* des $m+1$ quantités $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ et de degré $2m-2$; et pour que l'équation ait deux racines égales, l'on doit avoir $\Delta = 0$, Δ étant débarrassé de tout facteur étranger.

Observation. M. Joachimsthal parvient à la même équation (1) par des considérations analogues (*voir* t. IX, p. 99); il semble que la démonstration de M. Jacobi ne puisse plus s'appliquer à la recherche de la valeur de p, lorsque $\alpha_0 = \alpha_m$.

Supposons que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ représentant des fonctions d'une variable ou de plusieurs variables, de deux par exemple, x et y, de degrés respectivement marqués

par B_0, B_1, B_2, ..., B_m; si dans l'équation $\Delta = 0$ on remplace $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ respectivement par $\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots,$ $\alpha_m t^{B_m}$, la fonction $\Delta\left(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right)$ est de même degré en t, que l'équation $\Delta = 0$ est de degré en x, y.

En effet, si les nombres $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_m$ forment une progression arithmétique dont la raison est C, on a

$$B_i = B_0 + iC,$$

et

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right)\\ &= t^{(2m-2)B_0} \Delta\left(\alpha_0, \alpha_1 t^{C}, \alpha_2 t^{2C}, \ldots, \alpha_m t^{mC}\right).\end{aligned}$$

Il faut se rappeler que Δ est une fonction *homogène* de degré $2m-2$.

Comme $h_1, h_3, \ldots, h_m$ sont racines de l'équation

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \ldots + \alpha_m h^m,$$

il s'ensuit que $h_1 t^{-C}, h_2 t^{-C}, \ldots, h_m t^{-C}$ sont racines de l'équation

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 t^{C} h + \alpha_2 t^{2C} h^2 + \ldots + \alpha_m t^{mC} h^m;$$

donc, en vertu de l'équation (1),

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1 t^{C}, \alpha_2 t^{2C}, \ldots, \alpha_m t^{mC}\right)\\ &= \alpha_m^{2m-2} t^{m(2m-2)C} \Pi\left(h_i t^{-C} - h_k t^{-C}\right)^2,\end{aligned}$$

d'où, faisant sortir t^{-C} de Π,

$$\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1 t^{C}, \alpha_2 t^{2C}, \ldots, \alpha_m t^{mC}\right) = t^{m(m-1)C} \Delta\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right),$$

$$\Delta\left(\alpha^0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right) = t^{(m-1)(2B_0 + mC)} \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Mais

$$2B_0 + mC = B_0 + B_m,$$

donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\Delta\left(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right)\\ &= t^{(m-1)(B_0 + B_m)} \Delta\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right);\end{aligned}\right.$$

$\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ne contient pas la grandeur t; donc le degré en t du premier membre est $(m-1)(B_0 + B_m)$; c'est donc aussi le degré de l'équation $\Delta = 0$ en x, y.

C. Q. F. D.

4. Théorème. *Étant donnée l'équation du $m^{ième}$ degré*

$$0 = F(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m;$$

si on la transforme, par la substitution de $h = \dfrac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}$, *en cette autre équation,*

$$0 = (\gamma + \delta g)^m F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right) = \beta_0 + \beta_1 g + \beta_2 g^2 + \ldots + \beta_m g^m,$$

on a

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2 - m} \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

$\Delta = 0$ *désignant l'équation de condition pour que l'équation* $0 = F(h)$ *ait deux racines égales.*

Démonstration. Soit $h_i = \dfrac{\gamma' + \delta' g_i}{\gamma + \delta g_i}$ ou $g_i = \dfrac{\gamma' - \gamma h_i}{\delta h_i - \delta'}$: alors $g_1, g_2, \ldots, g_m$ sont racines de l'équation

$$0 = \beta_0 + \beta_1 g + \ldots + \beta_m g^m = (\gamma + \delta g)^m F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right);$$

en vertu de la formule (1), on a

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \beta_m^{2m-2} \Pi (g_i - g_k)^2,$$

et l'on a évidemment

$$\beta_m = \delta^m F\left(\frac{\delta'}{\delta}\right);$$

il suffit pour cela de faire $g = \infty$. Ensuite on a

$$g_i - g_k = \frac{(\gamma\delta' - \gamma'\delta)(h_i - h_k)}{(\delta' - \delta h_i)(\delta' - h_k)};$$

le dénominateur dans le produit $\Pi(g_i - g_k)$ est donc

égal à

$$\begin{aligned}&[(\delta'-\delta h_1)(\delta'-\delta h_2),\ldots,(\delta'-\delta h_m)]^{2m(m-1)}\\&=\delta^m\left[\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_1\right)\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_2\right),\ldots,\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_m\right)\right]^2\\&=\frac{\delta^m}{\alpha_m}\mathrm{F}\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)=\frac{\beta_m}{\alpha_m},\end{aligned}$$

car

$$\mathrm{F}(h)=\alpha^m(h-h_1)(h-h_2),\ldots,(h-h_m);$$

ainsi,

$$\Pi(g_i-g_k)^2=(\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m(m-1)}\left(\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right)^{2m-2}\Pi(h_i-h_k)^2,$$

et de là

$$\Delta(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m)=\beta_m\Pi(g_i-g_k)^2=(\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m(m-1)}\times\Delta(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m).$$

C. Q. F. D.

Corollaire. Si le déterminant $\gamma\delta'-\delta'\gamma$ est égal à l'unité, on a

$$\Delta(\beta_0,\ldots,\beta_m)=\Delta(\alpha,\ldots,\beta_m).$$

5. Problème. *Soient les deux fonctions f et ψ, entières en x et y; on a de plus $f=0$. Trouver, s'il est possible, une fonction entière λ en x, y, telle que le degré de la fonction entière $\psi+\lambda f=\nu$ soit diminué de ε unités.*

Solution. Il est d'abord évident que λf doit être de même degré que ψ; ainsi, le degré de λ est déterminé. D'après la notation ci-dessus (§ 1), écrivons

$$\begin{aligned}\psi&=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\ldots,\\f&=f_0+f_1+f_2+\ldots,\\\lambda&=\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots,\\\nu&=\nu_0+\nu_1+\nu_2+\ldots;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\nu_0+\nu_1+\nu_2+\ldots\\&=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\ldots+(\lambda_0+\lambda_1+\ldots)(f_0+f_1+f_2+\ldots),\end{aligned}$$

et de là on tire, ν et ψ étant du même degré,

$$\nu_0 = \psi_0 + \lambda_0 f_0,$$
$$\nu_1 = \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0,$$
$$\nu_2 = \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0,$$
etc., etc.

Si le degré de ν doit s'abaisser de ε unités, on devra avoir les identités :

$$0 = \psi_0 + \lambda_0 f_0,$$
$$0 = \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0,$$
$$0 = \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$0 = \psi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \ldots \lambda_{\varepsilon-1} f_0.$$

La première équation montre que ψ_0 doit être divisible par f_0, et le quotient fait alors connaître $-\lambda_0$; la seconde équation montre que $\psi_1 + \lambda_0 f_1$ doit être divisible par f_0, et le quotient donne $-\lambda_1$, et ainsi de suite. Si une de ces divisibilités manque, le problème est impossible; lorsque ces conditions sont remplies, les quotients font connaître les ε fonctions entières $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\varepsilon-1}$, et λ est connu, car l'on a

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_{\varepsilon-1} + \lambda_\varepsilon + \lambda_{\varepsilon+1}, \ldots,$$

où l'on peut prendre pour λ_ε, $\lambda_{\varepsilon+1}$, etc., des fonctions entières quelconques de degré inférieur aux ε premières puissances dans λ.

6. Théorème. *Si l'on a deux fonctions entières $f(x, y)$ et $y^k \varphi(x, y)$, telles que le degré de cette dernière fonction puisse être diminué de ε unités au moyen de l'équation $f(x, y) = 0$, et si, de plus, $f_{(0)}$ n'est pas divisible par y, alors le degré de $\varphi(x, y)$ pourra être diminué aussi de ε unités au moyen de la même équation $f(x, y) = 0$.*

Démonstration. Faisons

$$y^k \varphi(x,y) = \psi(x,y);$$

alors

$$\psi_{(0)} = y^k \varphi_0, \quad \psi_1 = y^k \varphi_1, \quad \varphi_2 = y^k \varphi_2, \text{ etc.};$$

donc les ε identités du problème précédent deviennent

$$\begin{aligned}
0 &= y^k \varphi_0 + \lambda_0 f_0, \\
0 &= y^k \varphi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0, \\
0 &= y^k \varphi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= y^k \varphi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \ldots \lambda_{\varepsilon-1} \lambda_0.
\end{aligned}$$

Mais f_0 n'étant pas divisible par y^k, il faut, d'après le lemme 2, que λ_0 soit divisible par y^k; et, par le même raisonnement, on déduit de la seconde identité, que λ_1 doit aussi être divisible par y^k, et ainsi de suite; on peut donc poser

$$\lambda_0 = y^k \mu_0, \quad \lambda_1 = y^k \mu_1, \quad \lambda_2 = y^k \mu_2, \ldots, \lambda_{\varepsilon-1} = y^k \mu_{\varepsilon-1},$$

où $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\varepsilon-1}$ sont des fonctions entières de x, y; les identités donnent

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi_0 + \mu_0 f_0, \\
0 &= \varphi_1 + \mu_0 f_1 + \mu_1 f_0, \\
0 &= \varphi_2 + \mu_0 f_2 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= \varphi_{\varepsilon-1} + \mu_0 f_{\varepsilon-1} + \mu_1 f_{\varepsilon-2} + \ldots \mu_{\varepsilon-1} f_0;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_{\varepsilon-1} \\
&+ (\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_{\varepsilon-1})(f_0 + f_1 + \ldots) = 0,
\end{aligned}$$

par conséquent, dans l'expression

$$\varphi + (\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_{\varepsilon-1}),$$

les ε premières puissances les plus élevées disparaissent.

C. Q. F. D.

7. Ces préliminaires posés, nous pouvons passer au problème à résoudre :

Problème. *Trouver le nombre de tangentes doubles d'une courbe du $n^{ième}$ ordre.*

Solution. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe donnée, de degré n. On rend cette équation homogène en multipliant les termes de degré inférieur à n par des puissances d'une variable z; représentons la fonction qu'on obtient ainsi par $f(x, y, z)$. Si, d'après la notation du § 1, on écrit

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n,$$

on aura

$$f(x, y, z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots + f_n z^n.$$

Soient x, y les coordonnées d'un point de la courbe, par lequel passe une tangente, dont nous désignons les coordonnées par p et q; on a

$$\frac{df}{dx}(p - x) + \frac{df}{dy}(q - y) = 0.$$

Faisons

$$p = x + \frac{df}{dy} h, \quad q = y - \frac{df}{dx} h;$$

en donnant à h toutes les valeurs de $+\infty$ à $-\infty$, on obtient toutes les coordonnées de la tangente. Pour tous les points d'intersection de cette tangente avec la courbe, on doit avoir

$$f(p, q, z) = f\left(x + \frac{df}{dy} h,\ y - \frac{df}{dz} h, z\right) = 0;$$

posons

$$\frac{df}{dx} = a, \quad \frac{df}{dy} = b, \quad \frac{df}{dz} = c,$$

et

$$f(x + bh,\ y - ah,\ z) = u_2 h^2 + u_3 h^3 \ldots u_n h^n,$$

car les deux premiers termes disparaissent, à cause des deux équations

$$f(x,\ y,\ z) = 0, \quad b\frac{df}{dx} - a\frac{df}{dy} = 0;$$

la tangente coupe la courbe en $n - 2$ points donnée par l'équation

$$(3)\ \Big\{\ 0 = \frac{1}{h^2} f(x + bh, y - ah, z) = u_2 + u_3 h + \ldots + u_n h^{n-2}.$$

Si cette équation a deux racines égales, la tangente devient *double,* c'est-à-dire qu'elle touche la courbe en deux points différents. Alors on doit avoir, comme ci-dessus,

$$\Delta(u_2,\ u_3,\ldots,\ u_n) = 0.$$

Cette équation détermine, avec celle-ci,

$$f(x,\ y,\ z) = 0,$$

le nombre des tangentes doubles.

Dans l'équation (3), remplaçons h par hy, et se rappelant que l'on a, à cause de l'homogénéité,

$$xa + yb + zc = nf = 0 \quad \text{et} \quad by = -xa - zc,$$

on aura successivement

$$(4)\ \left\{\begin{aligned} & y^2 u_2 + y^3 u_3 h + y^4 u_4 h^2 + \ldots + y^n u_n h^{n-2} \\ & = \frac{1}{h^2} f(x + ybh,\ y - yah,\ z) \\ & = \frac{1}{h^2} f(x\mathrm{A} - zch,\ y\mathrm{A},\ z\mathrm{A} + zah) \\ & = \frac{\mathrm{A}^n}{h^2} f\left(x - \frac{zch}{\mathrm{A}},\ y,\ z + \frac{zah}{\mathrm{A}}\right), \end{aligned}\right.$$

où

$$\mathrm{A} = 1 - ah.$$

Faisons

$$(5)\ f(x - ch,\ y,\ z + ah) = v_2 h^2 + v_3 h^3 + \ldots + v^n h^n;$$

remplaçant h par $\frac{zh}{A}$, on obtient

$$f\left(x - \frac{zch}{A}, y, z + \frac{zah}{A}\right) = \frac{z^2 v_2 h^2}{A^2} + \ldots + \frac{z^n v_n h^n}{A^n};$$

donc, à cause de l'équation (4),

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} y^2 u_2 + y^3 u^3 h + \ldots + y^n u_n h^{n-2} \\ = z^2 v_2 A^{n-2} + z^3 v_3 A^{n-3} h + z^4 v_4 A^{n-4} h^2 + \ldots + z^n v_n h^{n-2}; \end{array} \right.$$

mettant à la place de A sa valeur $1 - ah$, et développant le membre à droite, suivant les puissances croissantes de h, supposons que l'on ait

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} z^2 \beta_2 + z^2 \beta_3 h + z^2 \beta_4 h^2 + \ldots + z^2 \beta_n h^{n-2} \\ = z^2 v_2 A^{n-2} + \ldots + z^n v_n h^{n-2}, \end{array} \right.$$

alors

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} y_2 u_2 + y_3 u_3 h + y_4 u_4 h^2 + \ldots + y^n u_n h^{n-2} \\ = z^2 \beta_2 + z^2 \beta_3 h + \ldots + z^2 \beta_n h^{n-2}, \end{array} \right.$$

et de là

$$(9) \qquad y^2 u_2 = z^2 \beta_2, \quad y^3 u_3 = z^2 \beta_3, \quad y^2 u_n = z^2 \beta_n.$$

Au moyen de ces équations et de l'équation de la courbe $f = 0$, on peut opérer la transformation des coefficients $y^i u_i$.

Si, dans l'identité (2) employée ci-dessus (p. 144), on remplace respectivement α_i, t, m, B_0, B_m par u_{i+2}, y, $n-2$, 2, n, on obtient

$$\Delta(y^2 u_3, y^3 u_2, \ldots, y^n u_n) = y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n);$$

les équations (9) donnent

$$\Delta(y^2 u_2, y^3 u_3, \ldots, y^n u_n) = \Delta(z^2 \beta_2, z^2 \beta_3, \ldots, z^2 \beta_n);$$

donc

$$y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u^2, u_3, \ldots, u_n) = \Delta(z^2 \beta_2, z^2 \beta_3, \ldots, z^2 \beta_n).$$

Si, dans l'équation (7), on remplace h par $\frac{1 - ah}{h}$, et

qu'on ait égard au corollaire du théorème 4 (p. 146), et puisque ici

$$\gamma\delta' - \gamma'\delta = 1,$$

on a donc

$$\Delta(z^2\beta_2, z^2\beta_3, \ldots, z^2\beta_n) = \Delta(z^2 v_2, z^2 v_3, \ldots, z^2 v_n),$$

et

$$y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u^2, u_3, \ldots, u_n) = \Delta(z^2 v_2, z^2 v_3, \ldots, z^2 v_n).$$

Enfin, comme on a aussi l'équation identique

$$\Delta(z^2 v_2, z^2 v_3, \ldots, z^2 v_n) = z^{(n-3)(n+2)}\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n),$$

donc

(10) $$y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2, u_3, u_n) = z^{(n-3)(n+2)}\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n);$$

on a eu ci-dessus

(11) $$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}f(x+bh,\ y-ah,\ z) = u_2 + u^3 h + \ldots + u_n h^{n-2}, \\ \dfrac{1}{h^2}f(x-ch,\ y,\ z+ah) = v_2 + v_3 h + \ldots + v_n h^{n-2}. \end{cases}$$

Or, a, b, c sont des fonctions homogènes en x, y, z, chacune de degré $n-1$; donc les coefficients u_{i+2}, v_{i+2} sont des fonctions homogènes de même degré; donc aussi les deux membres de l'équation (10) sont des fonctions homogènes de même degré en x, y, z, car elles sont formées de la même manière avec les fonctions homogènes u_{i+2}, v_{i+3}.

Si, dans l'équation (10), on fait $z=1$, on voit que la fonction $y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n)$ peut, au moyen de l'équation $f=0$, devenir $\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n)$, par conséquent s'abaisser de $(n-3)(n+2)$ unités; donc, en vertu du théorème 6 (p. 147), la fonction $\Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n)$ peut aussi se changer en une fonction Δ' abaissée de $(n-3)(n+2)$ unités.

La proposition 6 ne subsiste qu'autant que tous les termes les plus élevés de f_n ne sont pas divisibles par y, c'est-à-dire que le terme x^n ne manque pas. C'est ce qu'on

peut toujours obtenir par un changement d'axes de coordonnées. Dans la seconde des équations (11), désignons le degré de ν_{i+2} par B_i, u_2 renferme $b^2 \frac{d^2 f}{dx^2}$; ainsi, B_0 est de même degré que ν_2 ou u_2, par conséquent de degré

$$2(n-1)+n-2=3n-4;$$

B_1 est de degré $3(n-1)+n-3=4n-6$, etc., de sorte que les quantités $B_0, B_1, \ldots, B_{n-2}$ forment une progression arithmétique dont la raison est $n-2$, et $B_{n-2}=n(n-1)$. Il suit donc du théorème 3 (p. 141), en y faisant $m=n-2$, que le degré de $\Delta(\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n)$ est

$$(n-3)(B_0+B_m)=(n-3)(n^2+2n-4);$$

donc le degré de Δ' est

$$(n-3)(n^2+2n-4)-(n-3)(n+2)=(n-2)(n^2-9);$$

ainsi, le système des deux équations

$$f=0, \quad \Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n)=0,$$

peut être remplacé par le système $f=0$, $\Delta'=0$, deux équations dont la première est de degré n et la seconde de degré $(n-2)(n^2-9)$; et chaque système de valeurs de x, y qui satisfait à un système d'équations, satisfait aussi à l'autre.

$n(n-2)(n^2-9)$ systèmes de valeurs satisfont aux équations

$$f=0, \quad \Delta'=0;$$

il n'y a donc que ce nombre de valeurs de x, y qui satisfassent aux équations

$$f=0, \quad \Delta(u_2, \ldots, u_4)=0,$$

valeurs qui rendent $f=0$, et qui, substituées dans l'équation

$$0=u_2+u_3 h+\ldots+u_4 h^{n-2},$$

donnent à cette équation deux racines égales; mais ces

valeurs de x, y sont les coordonnées des points de la courbe où la tangente touche encore la courbe en un autre point ; de sorte que ces valeurs de x, y sont les coordonnées des points de contact des doubles tangentes. Ainsi ces points sont donnés par l'intersection de la courbe du degré n $(f = 0)$ avec une autre courbe $(\Delta' = 0)$ de degré $(n-2)(n^2-9)$; ainsi *le nombre de ces points de contact est en général* $n(n-2)(n^2-9)$.

Deux de ces points de contact appartiennent toujours à la même tangente ; donc le nombre des doubles tangentes est $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$. C. Q. F. D.

8. Toute cette démonstration est fondée sur la remarquable équation (10) qui a été déduite de l'équation (4),

$$f(x+ybh, y-yah, z) = (1-ah)^n f\left(x - \frac{zch}{1-ah}, y, z + \frac{zah}{1-ah}\right).$$

Si l'on pose

$$A = 1-ah, \quad B = 1+bh, \quad C = 1+ch,$$
$$A' = 1-ah, \quad B' = 1+bh, \quad C' = 1+ch;$$

ensuite

$$f(x, y+ch, z-bh) = \varphi(h),$$
$$f(x-ch, y, z+ah) = \varphi_1(h),$$
$$f(x+bh, y-ah, z) = \varphi_2(h),$$

on obtient de la même manière que l'on a obtenu l'équation (4), les équations

$$(12) \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_2(yh) = A^n \varphi_1\left(\dfrac{zh}{A}\right), & \varphi_1(zh) = A'^n \varphi_2\left(\dfrac{yh}{A'}\right), \\ \varphi(zh) = B^n \varphi_2\left(\dfrac{xh}{B}\right), & \varphi_2(xh) = B'^n \varphi\left(\dfrac{zh}{B'}\right), \\ \varphi_1(xh) = C^n \varphi\left(\dfrac{yh}{C}\right), & \varphi(yh) = C'^n \varphi_1\left(\dfrac{xh}{C'}\right); \end{array} \right.$$

l'équation (10) a été déduite de la première équation de

la première ligne horizontale. On aurait aussi pu la déduire de la deuxième équation de cette même ligne.

On déduit deux équations analogues à l'équation (10) des quatre autres équations. Ces résultats sont renfermés dans le théorème suivant :

Théorème. *Représentons par* $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, *une fonction entière homogène des quantités* $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$, *de degré* $2m - 2$, *telle qu'en l'égalant à zéro, elle donne la condition pour que l'équation*

$$\alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m = 0$$

ait deux racines égales ; soit ensuite $f(x, y, z)$ *une fonction entière homogène de* x, y, z *de degré* n ; *enfin, posant*

$$\varphi_2(h) = f\left(x + \frac{df}{dy}h, y - \frac{df}{dx}h, z\right) = u_2 h^2 + u_3 h^3 + \ldots + u_n h^n,$$

$$\varphi_1(h) = f\left(x - \frac{df}{dz}h, y, z + \frac{df}{dx}h\right) = v_2 h^2 + v_3 h^3 + \ldots + v_n h^n,$$

$$\varphi(h) = f\left(x, y + \frac{df}{dz}h, z - \frac{df}{dy}h\right) = w_2 h^2 + w_3 h^3 + \ldots + w_n h^n,$$

$$\Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n) = \Delta,$$

$$\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n) = \Delta_1,$$

$$\Delta(w_2, w_3, \ldots, w_n) = \Delta_2,$$

où Δ, Δ_1, Δ_2 *sont des fonctions homogènes de* x, y, z *de degré* $(n-3)(n^2 + 2n - 4)$; *alors il résulte de l'équation* $f = 0$ *les proportions*

$$\Delta : \Delta_1 : \Delta_2 = z^{(n-3)(n+2)} : y^{(n-3)(n+2)} : x^{(n-3)(n+2)}.$$

Sur le nombre de points d'inflexion.

10. Soit

$$0 = f\left(x + \frac{df}{dy}h, y - \frac{df}{dx}h, z\right) = u_2 h + u_3 h^2 + \ldots + u_n h^{n-2};$$

si l'on a encore $u_2 = 0$, les coordonnées du point qui satisfont à cette équation et à celle de la courbe $f = 0$ sont

les coordonnées d'un point d'inflexion; la tangente devient osculatrice. Si dans l'équation (6) (p. 151) on fait $h=0$ et $A=1$, on obtient

$$y^2 u_2 = z^2 v_2;$$

si l'on fait $z=1$, la fonction $y^2 u_2$, et par conséquent la fonction u_2 se réduit de *deux unités;* mais u_2 est de l'ordre $3n-4$; elle peut donc se ramener, à l'aide de l'équation $f=0$, à une fonction u'_2 de l'ordre $3n-6$; par conséquent, le nombre de points d'inflexion est $3n(n-2)$, ainsi que M. Plücker l'a indiqué (*voir* t. IX, p. 293, th. 25).

11. L'équation (6) montre aussi que toutes les fonctions u_3, u_4, etc., peuvent se réduire de deux unités à l'aide de l'équation $f=0$; car, si dans l'équation (6) on remplace A par $1-ah$, et comparant les coefficients des mêmes puissances de h, on obtient

$$y^2 u_2 = z^2 v^2, \quad y^3 u_3 = z^3 v_3 - (n-2) z^2 a v^2 \ldots;$$

faisant $z=1$, $y^3 u_3$ et aussi u_3 s'abaisse de *deux* unités, et ainsi des autres. On peut aussi obtenir v en u, à l'aide des équations (12).

Sur le nombre de tangentes communes à deux courbes.

12. Ce nombre s'obtient facilement par la théorie des polaires réciproques; mais on peut le trouver analytiquement par la théorie précédente.

Soient

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

les équations de deux courbes de degrés m et n, ou simplement $\varphi=0$, $f=0$, x et y étant les coordonnées d'un point P de la courbe f; faisons derechef

$$\frac{df}{dx} = a, \quad \frac{df}{dy} = b, \quad \frac{df}{dz} = c, \quad p = x + bh, \quad q = y - ah,$$

les valeurs de h donnent les coordonnées courantes de la

tangente en P; les valeurs de h qui correspondent aux points où la tangente en P coupe la courbe φ, sont déterminées par l'équation

$$\varphi(p,q,z) = \varphi(x+bh, y-ah, z) = 0.$$

La condition pour que cette équation acquière deux racines égales détermine les points P de la courbe f, qui jouissent de la propriété que les tangentes en ces points touchent aussi la courbe φ; le nombre de ces points est celui des tangentes communes.

Soit

$$\varphi(x+bh, y-ah, z) = u_0 + u_1 b + u_2 h^2 + \ldots + u_m h^m = 0;$$

pour que cette équation ait deux racines égales, on doit avoir

$$\Delta(u_0, u_1, \ldots, u_m) = 0,$$

où Δ désigne une fonction homogène en x, y, z de degré $2m-2$; on a

$$xa + yb + zc = 0;$$

faisons comme ci-dessus,

$$A = 1 - ah,$$

nous obtiendrons

$$\varphi(x+ybh, y-yah, z) = A^m \varphi\left(x - z\frac{ch}{A}, \quad y, \quad z - z\frac{ah}{A}\right);$$

posons

$$\varphi(x-ch, y, z+ah) = v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + \ldots + v_m h^m,$$

et opérant comme ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} & u_0 + yu_1 h + y^2 u_2 h^2 + \ldots + y^m v_m h^m \\ &= v_0 A^m + zv_1 A^{m-1} A h + z^2 v_2 A^{m-2} h^2 + \ldots + z^m v_m h^m \\ &= \beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \beta_3 h^3 + \ldots + \beta_m h^m. \end{aligned}$$

On a

$$u_0 = \beta_0, \quad yu_1 = \beta_1, \quad y^2 u_2 = \beta_2 \ldots, \quad y^m u_m = \beta_m,$$

et à l'aide du théorème 4,

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \Delta(v_0, zv_1, z^2 v_2, \ldots, z^m v_m)$$
$$= \Delta(u_0, yu_1, y^2 u_2, \ldots, y^m u_m);$$

et le théorème 3 donne

$$\Delta(v_0, zv_1, z^2 v_2, \ldots, z^m v_m) = z^{m(m-1)} \Delta(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m),$$
$$\Delta(u_0, yu_1, y^2 u_2, \ldots, y^m u_m) = y^{m(m-1)} \Delta(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

donc

$$y^{m(m-1)} \Delta(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m) = z^{m(m-1)} \Delta(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Cette équation montre qu'en faisant $z = 1$, on peut, à l'aide de l'équation $f = 0$, ramener la fonction $y^{m(m-1)} \Delta(u_0, \ldots, u_m)$, et par conséquent aussi $\Delta(u_0, \ldots, u_m)$, à une autre fonction Δ' dont le degré est diminué de $m(m-1)$ unités.

Désignant le degré de v_i par B_i, les nombres $B_0, B_1, \ldots, B_m$ forment une progression arithmétique, et l'on a

$$B_0 = m,$$
$$B_1 = m - 1 + n - 1 = m + n - 2,$$
$$B_2 = m - 2 + 2(n-1) = m + 2n - 4,$$
$$B_m = m(n-1) \quad (\text{car les } v \text{ renferment des } a, b, c, \ldots).$$

La fonction $\Delta(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ monte donc au degré $(m-1)(B_0 + B_m) = mn(m-1)$; ainsi la fonction Δ' est du degré $mn(m-1) - m(m-1) = m(m-1)(n-1)$; ainsi les points P de la courbe f, qui ont la propriété énoncée, sont donnés par l'intersection d'une courbe f de degré n et d'une courbe $\Delta' = 0$ de degré $m(m-1)(n-1)$: le nombre de ces points est donc $mn(m-1)(n-1)$; résultat connu par la théorie des polaires réciproques.

Ce Mémoire, de l'illustre et à jamais regrettable analyste, qui complète enfin la théorie des polaires réciproques

(*voir* t. IX, p. 295), est suivi d'une Lettre de son savant élève, le professeur Otto Hesse; elle est datée de Kœnisberg, le 30 décembre 1849. Nous la traduisons *in extenso :*

« Je vous suis d'autant plus reconnaissant de ce que vous m'avez communiqué la démonstration relative aux *tangentes doubles,* que cela m'a engagé à faire un dernier effort pour trouver l'équation débarrassée de tous les termes superflus de la courbe qui passe par les points de contact des doubles tangentes pour une courbe du quatrième ordre; je savais d'ailleurs qu'une telle équation doit exister, car je puis indiquer *sept* coniques qui passent par ces points (*), non pas de la manière que ferait présumer le théorème *inexact* de Plücker sur les coniques passant par ces points, mais d'une toute autre manière, trop longue pour être donnée ici. Mon essai a réussi, et voici le résultat : soient $u = 0$ l'équation de la courbe du quatrième ordre; Δ le *déterminant* de la fonction u formée de ses coefficients différentiels du second ordre $u_{11}, u_{22}, \ldots$ (**). Soient ensuite $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots$, les premiers et seconds coefficients différentiels de Δ. Si l'on pose

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= u_{22}\ u_{33} - u_{23}^2, & \rho_{23} &= u_{13}\ u_{12} - u_{11}\ u_{23};\\ \rho_{22} &= u_{33}\ u_{11} - u_{13}^2, & u_{31} &= u_{21}\ u_{23} - u_{22}\ u_{31};\\ \rho_{33} &= u_{11}\ u_{22} - u_{12}^2, & u_{12} &= u_{32}\ u_{31} - u_{33}\ u_{12}, \end{aligned}$$

l'équation cherchée du 14e ordre est

$$\begin{gathered} (\Delta_1^2\rho_{11} + \Delta_2^2\rho_{22} + \Delta_3^2\rho_3^2\rho_{33} + 2\Delta_2\Delta_3\rho_{23} + 2\Delta_3\Delta_1\rho_{31} + 2\Delta_1\Delta_2\Delta_{12})\\ - 3\Delta_{11}\rho_{11} + \Delta_{22}\rho_{22} + \Delta_{33}\rho_{33} + 2\Delta_{23}\rho_{23} + 2\Delta_{31}\rho_{31} + 2\Delta_{12}\rho_{12}) = 0. \end{gathered}$$

» Veuillez avoir la bonté de remettre les Mémoires ci-joints à M. G.-R. Crelle. Agréez les vœux les plus sincères pour la nouvelle année, de votre très-dévoué disciple. »

(*) Points qui sont au nombre de cinquante-six.

(**) *Voir* tome X, page 124.

Observation. C'est M. Hesse qui a introduit la *théorie des homogènes* dans la science. Voici ce que M. Jacobi dit, à l'occasion de cette introduction, dans le Mémoire ci-dessus sur les doubles tangentes : « Les formules » de la Géométrie analytique ont gagné essentiellement » en simplicité et en symétrie, en introduisant la fonc- » tion homogène $f(x, y, z)$ de trois variables x, y, z, » au lieu de la fonction non homogène $f(x, y)$; et sans » cette introduction, plusieurs des plus importantes re- » cherches ne pourraient se faire sans de très-pénibles » longueurs. Les recherches suivantes montreront de » nouveau l'utilité de cet important moyen auxiliaire. »

Ce puissant auxiliaire est encore ignoré en France, pays de l'Europe où l'enseignement mathématique est le plus arriéré, et où des prescriptions *misologues* viennent repousser encore ce maigre enseignement au-dessous de celui de 1650 (*).

M. Poncelet a démontré les théorèmes suivants :

1°. *Une courbe plane* A *de degré* n, *a*, généralement parlant, *pour polaire réciproque, une courbe de degré* $n(n-1)$;

2°. *Si la courbe* A *a* α *points doubles et* β *points de rebroussement, le degré de la courbe* B *est diminué de* $2\alpha + 3\beta$ *unités ;*

3°. *A chaque tangente double de* A *correspond un point double dans* B; *à chaque point d'inflexion de* A *correspond un point de rebroussement dans* B.

Faisons

$$n(n-1) = n';$$

la polaire réciproque de B, d'après le théorème 1, devrait

(*) Au XVIIe siècle, la géométrie segmentaire était enseignée.

être du degré

$$n'(n'-1) = n^4 - 2n^3 + n;$$

toutefois, cette polaire réciproque n'est que du degré n; elle s'abaisse ainsi de $n^4 - 2n^3$ unités : cela ne peut provenir que des points doubles et de rebroussement de la courbe B, ou, ce qui revient au même (théorème 3), des tangentes doubles et des points d'inflexion de la courbe A.

Si α représente le nombre des tangentes doubles, et β le nombre des points d'inflexion, on devra avoir

$$2\alpha + 3\beta = n^4 - 2n^3;$$

or, M. Plücker a démontré que l'on a

$$\beta = 3n(n-2).$$

Il a conjecturé que

$$\alpha = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

(*voir* tome IX, page 295); et il a même démontré l'exactitude de la valeur de α pour $n = 4$; dès lors

$$2\alpha + 3\beta = n^4 - 2n^3.$$

M. Jacobi a, le premier, démontré la généralité de la valeur de α. Ainsi, le paradoxe que présentait la théorie des polaires réciproques est complétement expliqué.

SOLUTION DE LA QUESTION 242

(voir t. X, p. 358);

PAR M. H. FAURE.

Soit $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$ l'équation caractéristique d'une série récurrente : les deux premiers termes étant 1 et 3, aucun terme n'est un carré. (EULER.)

Si l'on développe la quantité $1+\sqrt{2}$ élevée aux différentes puissances, la partie commensurable a pour valeur

(1) 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577,...,

tandis que les coefficients de $\sqrt{2}$ sont respectivement

(2) 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408,....

Il est facile de s'assurer que ces deux suites de nombres forment deux séries récurrentes, qui ont pour échelle de relation les nombres 2 et 1. La première est la série dont il est question dans l'énoncé; la seconde jouit aussi de propriétés remarquables, que l'on signalera plus tard.

Soient x et y deux termes correspondants des séries (1) et (2), et posons, par exemple,

$$(1+\sqrt{2})^n = x + y\sqrt{2}.$$

Nous aurons aussi

$$(1-\sqrt{2})^n = x - y\sqrt{2};$$

d'où, en multipliant et supposant n pair,

$$1 = x^2 - 2y^2.$$

Si x pouvait être un carré z^2, on aurait

$$z^4 - 1 = 2y^2;$$

mais, d'après un théorème dû à M. Liouville (t. V, p. 73), la différence de deux bicarrés ne peut être le double d'un carré; donc déjà les termes de rang pair de la série ne peuvent être des carrés.

Si n est impair, on a

$$-1 = x^2 - 2y^2,$$

équation que l'on peut écrire ainsi,

$$y^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right),$$

et comme x est impair, $\frac{x+1}{2}$ et $\frac{x-1}{2}$ sont deux nombres entiers consécutifs; d'ailleurs, la somme de ces deux nombres est x : la question est donc ramenée à voir si, la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs étant un carré, la somme de ces deux nombres peut en être aussi un ; autrement dit, les équations

$$a^2 + (a+1)^2 = t^2,$$
$$2a + 1 = u^2,$$

sont-elles compatibles? Il est facile de s'assurer qu'elles ne le sont pas, car si du carré de la seconde on retranche le double de la première, on trouve

$$u^4 - 2t^2 = 1,$$

équation impossible. Donc aucun terme de la série (1) n'est un carré.

Remarque I. Si l'on forme le terme général de la série (1), on trouve facilement, pour la valeur du terme T_n,

$$T_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}.$$

Or, si l'on développe cette expression au moyen de la formule du binôme, les termes irrationnels se détruiront, tandis que les autres s'ajouteront; on aura donc, après avoir divisé par 2,

$$T_n = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2}2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}2^2 + \ldots$$

On peut donc dire que, quelle que soit la valeur que l'on donnera à n, jamais cette expression ne pourra devenir un carré.

Remarque II. La démonstration précédente prouve qu'en considérant les termes de rang pair de la série (1), le carré de chacun d'eux, diminué de 1, est le double du carré du terme correspondant de la série (2), et qu'au

contraire, si au carré d'un terme de rang impair on ajoute l'unité, on forme le double du carré du terme correspondant de la série (2).

D'après une autre décomposition, si l'on ne considère que les termes de rang impair de la série (2), le carré de chacun d'eux est la somme de deux carrés consécutifs; ainsi :

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1^2 + 0^2, \\ 5^2 &= 3^2 + 4^2, \\ \overline{29}^2 &= \overline{20}^2 + \overline{21}^2, \\ \overline{169}^2 &= \overline{119}^2 + \overline{120}^2, \\ \overline{985}^2 &= \overline{696}^2 + \overline{697}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

de plus, la somme des racines des quantités placées dans le second membre doit former le terme de rang impair correspondant dans la série (1); ainsi :

$$\begin{aligned} 1 + 0 &= 1, \\ 3 + 4 &= 7, \\ 20 + 21 &= 41, \\ 109 + 120 &= 239, \\ 696 + 697 &= 2393, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Considérons, d'un autre côté, cinq termes consécutifs a, b, c, d, e de la série (2); on a :

$$\begin{aligned} e &= 2d + c, \\ d &= 2c + b, \\ c &= 2b + a. \end{aligned}$$

Éliminant b et d, on trouve

$$e = 6c - a;$$

telle est donc la relation qui existera entre trois termes

consécutifs de la série obtenue, en ne considérant que les termes de rang impair dans la série (2). On peut donc énoncer ce théorème : *Si* $T_{n+2} = 6\,T_{n+1} - T_n$ *est l'équation caractéristique d'une série récurrente dont les deux premiers termes sont* 1 *et* 5, *le carré de chaque terme est la somme de deux carrés entiers consécutifs.*

Remarque III. Aucun terme de la série (2) ne peut être un carré : théorème analogue à celui qui était proposé.

Remarque IV. Le terme général de la série (2) est

$$T'_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$

ou bien, en développant,

$$T'_n = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\,2^2 + \ldots;$$

donc, quelle que soit la valeur donnée à n, jamais cette expression ne pourra devenir un carré.

Remarque V. Considérons dans les séries (1) et (2) seulement les termes de rang pair; nous aurons les nombres

$$3,\quad 17,\quad 99,\quad 577,\ldots,$$
$$2,\quad 12,\quad 70,\quad 408,\ldots;$$

chaque terme de la première série, augmenté ou diminué de l'unité, deviendra un carré.

Car, soient toujours x et y deux termes correspondants de nos nouvelles séries, ils auront entre eux la relation

$$x^2 - 2y^2 = 1;$$

d'ailleurs

$$(1+\sqrt{2})^n = x + y\sqrt{2}.$$

Élevant au carré,

$$(1-\sqrt{2})^{2n} = x^2 + 2y^2 - 2xy\sqrt{2};$$

de sorte que si x est le terme de rang n, x^2+2y^2, que nous désignerons par T_{2n}, sera le terme de rang $2n$; on aura donc

$$T_{2n} - 1 = x^2 + 2y^2 - 1 = (2y)^2.$$

En donnant à n toutes les valeurs possibles, on voit que si l'on diminue d'une unité chaque terme de rang pair de nos nouvelles séries, on forme un carré. Pour avoir les termes de rang impair d'une manière analogue, il faut considérer x et y comme étant des termes de rang impair des séries (1) et (2); on a alors

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

par suite

$$T_{2n} + 1 = x^2 + 2y^2 + 1 = (2y)^2.$$

Remarque VI. Puisque $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, on a

$$\frac{x^2}{y^2} = 2 \pm \frac{1}{y^2},$$

et comme y peut surpasser toute valeur assignable, il s'ensuit que la limite des fractions

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \ldots,$$

que l'on obtient en divisant chaque terme de la série (1) par son correspondant de la série (2), que cette limite, dis-je, est $\sqrt{2}$, résultat connu depuis longtemps.

Mais ce que l'on n'a peut-être pas remarqué, c'est que le rapport

$$\frac{1+3+7+17+41+\ldots}{1+2+5+12+19+\ldots}$$

est égal à 2. Cela se voit aisément, car la série (1) est

donnée par la fraction

$$\frac{1+x}{1-2x-x^2},$$

tandis que la série (2) est donnée par la fraction

$$\frac{1}{1-2x-x^2};$$

leur rapport est $1+x$ et devient 2 pour $x=1$.

SUR LA QUESTION 267

(voir t. XI, p. 402);

Par M. le Professeur BRIOSCHI.

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, M sont six points situés sur un ellipsoïde,

$d_1 =$ dist. rectil. de A_1 à M,	$D_1 =$ demi-diam. parall. à d_1,
$d_2 =$ *id.* A_2 à M,	$D_2 =$ *id.* à d_2,
etc.	etc.

$v_1 =$ volume du tétraèdre $A_2A_3A_4A_5$,

$v_2 =$ *id.* $A_1A_3A_4A_5$,

etc.

On a la relation analytique $\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2} v_r = 0$.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde; α, β, γ les coordonnées du point M; x_r, y_r, z_r celles d'un quelconque des points

$A_1, A_2, \ldots$ la relation connue

$$\frac{d_r^2}{D_r^2} = \frac{(\alpha - x_r)^2}{a^2} + \frac{(\beta - y_r)^2}{b^2} + \frac{(\gamma - z_r)^2}{c^2}$$

nous donne

$$\frac{1}{2}\frac{d_r^2}{D_r^2} = 1 - \frac{\alpha x_r}{a^2} - \frac{\beta y_r}{b^2} - \frac{\gamma z_r}{c^2};$$

et, en posant $r = 1, 2, \ldots, 5$, on aura cinq équations analogues, entre les quatre inconnues $\frac{1}{2}\frac{d_r^2}{D_r^2}$, $\frac{\alpha}{a^2}$, $\frac{\beta}{b^2}$, $\frac{\gamma}{c^2}$, et par conséquent

$$\text{dét.}\begin{Bmatrix} \frac{d_1^2}{D_1^2}, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ \frac{d_2^2}{D_2^2}, & 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d_5^2}{D_5^2}, & 1, & x_5, & y_5, & z_5 \end{Bmatrix} = 0.$$

Or

$$\text{dét.}\begin{Bmatrix} 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \\ 1, & x_5, & y_5, & z_5 \end{Bmatrix} = v_1 \ldots;$$

donc, en développant le déterminant supérieur,

$$\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2} v_r = 0.$$

Si l'ellipsoïde devient une sphère, on a

$$D_1 = D_2 \ldots, \quad \text{et} \quad \sum \pm d_r^2 v_r = 0;$$

cette dernière relation a lieu aussi lorsque le point M n'est pas sur la sphère.

SOLUTION DE LA QUESTION 265;

PAR M. THIOLIER,
Élève à l'École des Mines, à Saint-Étienne.

Si $m = p^2 - q$, la suite des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{pa + mb}{a + pb}$, $\frac{a''}{b''} = \frac{pa' + mb'}{a' + pb'}$, ..., converge vers $\sqrt{m}$, quelle que soit la fraction initiale $\frac{a}{b}$; m, p, q, a, b sont des nombres entiers positifs donnés. (PROUHET.)

Considérons une fraction quelconque de cette suite, celle de rang $(n+2)$ par exemple; nous aurons

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{pa_n + mb_n}{a_n + pb_n} = p - \frac{q}{\frac{a_n}{b_n} + p}.$$

Or on a, de même,

$$\frac{a_n}{b_n} = p - \frac{q}{\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + p};$$

donc, en définitive, on aura

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p} - \cdots \cdots - \cfrac{q}{\frac{a}{b} + p}}};$$

par suite, la limite cherchée sera

$$x = p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p \cdots}}}$$

Or, si nous développons $\sqrt{m}$ en fraction continue, nous aurons

$$\sqrt{m} = \sqrt{p^2 - q} = p - \frac{q}{p + \sqrt{p^2 - q}}$$

$$p = - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p \cdots}}}$$

On voit donc qu'à la limite on a

$$x = \sqrt{m}.$$

NOTE SUR LES THÉORÈMES DE GÖPEL

(voir p. 136-138);

Par M. LEBESGUE.

On a omis de dire que les théorèmes sur les nombres premiers ne sont pas nouveaux; ils sont énoncés dans la *Théorie des Nombres* (*voir* t. I, p. 305 et 306). Chez Legendre, ces théorèmes sont une conséquence des diviseurs quadratiques de la formule $t^2 + au^2$ et de la loi de *réciprocité*, tandis que Göpel rattache ces théorèmes à la

réduction de la racine carrée du nombre premier en fraction continue.

On a d'ailleurs l'identité

$$y^2 - 2z^2 = 2(y \pm z)^2 - (y \pm 2z)^2.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Leonelli.

Supplément logarithmique contenant la décomposition des grandeurs numériques quelconques en facteurs finis; reconnue très-propre et incomparablement plus courte que toute autre méthode pour calculer directement les logarithmes et leurs valeurs naturelles à l'aide des logarithmes de ces facteurs, et munie de trois Tables de logarithmes facteurs : les deux premières pour les logarithmes vulgaires et hyperboliques à vingt décimales, et la troisième pour les logarithmes vulgaires à quinze décimales, dont l'application est encore plus simple et plus utile ; et

La théorie des logarithmes additionnels et déductifs où de certains logarithmes qui donnent directement les logarithmes des sommes et des différences des valeurs naturelles, dont on ne connaît que les logarithmes; par Leonelli. Prix : 3 francs; à Bordeaux, de l'imprimerie de *A. Brossier*, marchand de papier, rue de la Liberté, n° 10; an XI; in-8°, de 60 pages.

Cet opuscule, aussi remarquable qu'ignoré, contient deux parties. La première partie donne un moyen de calculer rapidement les logarithmes des nombres et les nombres correspondant aux logarithmes à l'aide d'une

décomposition des nombres en facteurs, décomposition très-ingénieuse et d'une extrême simplicité. Soit le binôme $a_1 + r_1$; on a l'identité

$$a_1 + r_1 = a_1 \left(1 + \frac{r_1}{a_1}\right).$$

Faisons $\frac{r_1}{a_1} = a_2 + \frac{r_2}{a_1}$; nous aurons

$$a_1 + r_1 = a_1 (1 + a_2) \left[1 + \frac{r_2}{a_1 (1 + a_2)}\right].$$

Posons $\frac{r_2}{a_1 (1 + a_2)} = a_3 + \frac{r_3}{a_1 + (1 + a_2)}$; nous obtiendrons

$$a_1 + r_1 = a_1 (1 + a_2)(1 + a_3) \left[1 + \frac{r_3}{a_1 (1 + a_2)(1 + a_3)}\right];$$

et ainsi de suite.

Soit maintenant N un nombre entier compris entre 10^p et 10^{p+1}; le logarithme de N, abstraction faite de la caractéristique, est le même que le logarithme de $\frac{N}{10^p}$; on prend la partie entière de $\frac{N}{10^p}$ pour a_1 et la partie décimale pour r_1; a_1 n'a qu'un seul chiffre, et les quantités r devenant de plus en plus petites peuvent enfin être négligées. On divise r_1 par a_1 en ne prenant qu'un seul chiffre significatif que l'on prend pour a_2 et le reste pour r_2; on divise r_2 par $a_1 (1 + a_2)$ en ne prenant toujours qu'un seul chiffre; on obtient a_3, et ainsi de suite; de sorte que les nombres $1 + a_1$, $1 + a_2$, $1 + a_3$, etc., sont de la forme $1 + \frac{t}{10^m}$, où t est un des nombres de la suite 1, 2, 3,..., 9, et l'on obtient

$$\log \frac{N}{10^p} = \log a_1 + \log(1 + a_1) + \log(1 + a_2) + \ldots;$$

Si l'on a donc une Table des logarithmes des nombres de la forme $1 + \frac{1}{10^m}$, on aura ainsi, par une simple addition, le logarithme N; Leonelli a calculé cette Table pour les logarithmes vulgaires et népériens en donnant à m toutes les valeurs, depuis 0 jusqu'à 11, et à t les valeurs de 1 à 9, chaque logarithme avec vingt décimales, en tout quatre-vingt-quinze logarithmes; par exemple, soit $N = 871$.

On prend

$$a_1 = 8, \quad r_1 = 0,71, \quad a_2 = 0,08, \quad r_2 = 0,07,$$
$$a_3 = 0,008, \quad r_3 = 0,06912, \ldots,$$

et l'on trouve

$$a_1 = 8, \quad a_2 = \frac{8}{10^2}, \quad a_3 = \frac{8}{10^3}, \quad a_4 = \frac{1}{10^4}, \quad a_5 = \frac{1}{10^6},$$
$$a_6 = \frac{4}{10^8}, \quad a_7 = \frac{3}{10^9}, \quad a_8 = \frac{3}{10^{10}}, \quad a_9 = \frac{9}{10^{11}}, \quad a_{10} = \frac{9}{10^{12}},$$

et

$$8,17 = a_1 (1 + a_2)(1 + a_3), \ldots, (1 + a_{10}).$$

Prenant, dans la Table, les logarithmes des onze quantités $a_1 (1 + a_1)$, etc., on trouve, pour logarithme vulgaire,

$$\log 8,71 = 0,9400181550074 1.$$

Leonelli indique aussi un procédé pour revenir du logarithme au nombre. On voit que l'avantage de cette méthode est de se procurer les logarithmes avec tant de décimales qu'on veut. On peut aussi adopter pour a_1, a_2, etc., deux chiffres significatifs, mais alors il faut calculer d'avance une autre Table, et ce qu'il nomme la troisième Table à deux chiffres, mais seulement pour les logarithmes vulgaires.

Ces Tables, si utiles, devraient être imprimées avec

celles de Callet, que les progrès de la science ont rendues si insuffisantes. L'Allemagne possède des Tables riches, commodes et peu coûteuses. Telles sont les Tables de Véga publiées à Leipzig en 1849; prix : 14 francs.

La seconde partie contient une Table au moyen de laquelle, connaissant log m et log n, on trouve immédiatement log $(m+n)$ sans connaître ni m ni n. C'est cette Table que M. Gauss a perfectionnée et mise en vogue, et il dit, en effet, en devoir l'idée à Leonelli, dont elle devra porter le nom (*voir* tome X, page 289). Nous en avons donné l'explication au même endroit; l'argument de cette Table étant les logarithmes de $1+\frac{m}{n}$ ou de $1-\frac{m}{n}$, on voit que la seconde partie de l'ouvrage de Leonelli a quelque rapport avec la première. C'est le même genre d'idées (*).

Leonelli ayant présenté son ouvrage à l'Institut, Delambre en fit le Rapport dans la séance du 1er floréal an x, Rapport qui est joint à l'ouvrage (page 49); parlant du procédé de la première partie, Delambre dit : « L'idée » sur laquelle se fonde tout ce procédé est si simple » et si naturelle, qu'on a lieu de s'étonner également, » ou que personne ne l'ait eue avant M. Leonelli, ou, » si elle n'est pas nouvelle, que tous les éditeurs de » Tables logarithmiques n'aient pas consacré deux pages » à l'exposition d'une méthode qui paraît un supplément » *indispensable*, surtout aux Tables qui n'ont que six ou » sept décimales. Pour nous, nous n'en avions aucune » idée et nous la regardions comme absolument nouvelle,

(*) Une traduction allemande de l'ouvrage de Leonelli a paru à Dresde, en 1806, *Leonelli logarithmische Supplemente;* c'est probablement cette traduction que M. Gauss aura lue. L'original est excessivement rare, je ne le trouve cité que dans *la France littéraire* de M. Querard.

» quand le citoyen Lagrange s'est souvenu de l'avoir vue
» dans une préface de Vlacq, qui devait l'avoir tirée de
» Briggs. »

On sait, en effet, que Jean Neper, baron de Merchiston, dans son *Mirifici logarithmorum canonis Descriptio* (Édimbourg, 1614), a adopté pour base du système un nombre irrationnel qu'on a depuis désigné par la lettre e; cet ouvrage, n'ayant pour but que de calculer les triangles sphériques, ne contient que les lignes trigonométriques et leurs logarithmes, sans dire la manière de les calculer. L'auteur étant mort en 1617, son fils Robert publia, à Lyon, en 1620, un autre ouvrage de son père, intitulé : *Logarithmorum canonis constructio*. Dans un appendice, Neper dit qu'un système plus commode serait celui où l'on poserait

$$\log 1 = 0 \quad \text{et} \quad \log 10 = 1.$$

C'est ce système que Henri Briggs a adopté avec l'approbation de Neper; il publia une première chiliade en 1617, et ensuite dans son *Arithmetica logarithmica* (Londres, 1624), ouvrage excessivement rare, ce géomètre a calculé trente chiliades, de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000, avec quatorze décimales; pour remplir la lacune, il propose deux méthodes : la première est celle de l'*interpolation*, et la seconde, qu'il donne dans son chapitre XIV, est précisément celle que Leonelli a *retrouvée* avec deux changements; 1° sa Table est à vingt décimales : celle de Briggs n'en a que quatorze; 2° la Table de Leonelli n'en suppose aucune autre, celle de Briggs suppose qu'on ait déjà une Table de dix mille logarithmes (*). Adrien Vlacq, mathématicien et libraire, a rempli la lacune laissée par Briggs; ses grandes Tables, qui parurent à Gouda

(*) Briggs est mort en 1630.

(Hollande) en 1628, contiennent des logarithmes vulgaires de 1 à 100000, mais seulement avec dix décimales. Vlacq copie le discours préliminaire de Briggs et donne les deux méthodes; depuis, aucun écrivain n'a parlé du second procédé, et il était complétement oublié lorsque Leonelli, comme nous avons dit, l'a de nouveau inventé, et il a été derechef oublié en France, car Leonelli n'a pas mis son opuscule en vente. Il n'existe pas dans les bibliothèques publiques de Paris. J'en ai parlé par hasard au même savant qui m'a procuré la biographie de Malfatti (page 136). *Étant à Corfou en* 1842, me dit-il, *j'y ai rencontré Leonelli qui m'a donné son ouvrage et d'autres brochures.* Une demi-heure après, j'avais l'ouvrage.

Dans un article d'un journal publié à Corfou (*Album-Jonio,* 28 avril 1841), Leonelli prend le titre d'architecte et signe Zecchini-Leonelli. L'article concerne une extraction rapide des racines des nombres.

On a aussi de Leonelli un ouvrage intitulé : *Démonstration des phénomènes électriques,* ou *Théorie de l'électricité prouvée par l'expérience.* Strasbourg; de l'imprimerie de *Levrault;* 1813; in-8°. La bibliothèque de cette ville ne possède aucun ouvrage de Leonelli. La bibliothèque de Bordeaux a le *Supplément logarithmique.*

On lira peut-être avec quelque intérêt ce compte rendu, aujourd'hui que les professeurs, sous peine d'être mal notés, sont tenus de rendre aux logarithmes un culte de dulie.

NOTE SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES (*);

Par M. E. LIONNET,
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

PRINCIPES.

I. *L'erreur absolue* d'une quantité, remplacée par une valeur approchée par excès ou par défaut, est la différence entre cette quantité et sa valeur approchée. Ainsi l'erreur absolue du nombre 957, remplacé par 960 ou par 954, est égale à 3 unités.

II. *L'erreur relative* d'une quantité, remplacée par une valeur approchée par excès ou par défaut, est le rapport de l'erreur absolue de cette quantité à cette même quantité. Ainsi l'erreur relative du nombre 957, remplacé par 960 ou par 954, est égale à $\frac{3}{957}$.

III. *L'erreur relative d'un nombre entier ou décimal sur la droite duquel on supprime un ou plusieurs chiffres, qu'on remplace par des zéros s'ils sont à gauche de la virgule, est moindre que l'unité décimale dont l'ordre est marqué par le nombre moins un des chiffres conservés à partir du premier chiffre significatif.*

Ainsi l'erreur relative du nombre 0,0314159, qu'on remplace par 0,0314, est moindre que 0,01. Car l'erreur absolue du nombre proposé est moindre qu'un dix-millième, tandis que le nombre proposé lui-même excède

(*) Cette théorie des approximations répond aux nos 16 et 17 du programme d'arithmétique des lycées (sciences, classe de troisième). Elle suffit aux candidats aux Écoles du Gouvernement.

300 dix-millièmes, et, à plus forte raison, 100 dix-millièmes; donc l'erreur relative de ce nombre (II) est moindre que 1 dix-millième divisé par 300 dix-millièmes ou que $\frac{1}{300}$, et, à plus forte raison, moindre que 0,01. On voit de même que l'erreur relative du nombre 314,159, remplacé par 314,1, est moindre que 0,001, et que l'erreur relative du nombre 314159, remplacé par 310000, est moindre que 0,1.

Corollaire. Il en résulte que, *pour obtenir une valeur approchée par défaut d'un nombre entier ou décimal avec une erreur relative moindre qu'une unité décimale d'un ordre énoncé, il suffit de conserver sur la gauche de ce nombre, à partir du premier chiffre significatif, un nombre de chiffres égal au nombre plus un qui marque l'ordre énoncé.*

Remarque I. Lorsque le premier chiffre significatif à gauche du nombre proposé est autre que 1, *l'erreur relative de ce nombre est moindre qu'une demi-unité décimale de l'ordre marqué par le nombre moins un des chiffres conservés.* Ainsi l'erreur relative du nombre 0,0314159, remplacé par 0,0314, étant moindre que $\frac{1}{300}$, est, à plus forte raison, moindre qu'un demi-centième. Il en est encore de même lorsque le premier chiffre significatif, à gauche du nombre proposé, étant 1, le premier des chiffres négligés, exprime moins de 5 unités ou lorsque ce chiffre est un 5 non suivi d'autres chiffres significatifs. Ainsi l'erreur relative du nombre 14,142..., remplacé par 14,14, est moindre qu'un demi-millième.

Car l'erreur absolue du nombre proposé étant moindre qu'un demi-centième et ce nombre excédant mille centièmes, son erreur relative est moindre qu'un demi-centième divisé par mille centièmes ou qu'un demi-millième.

Donc, dans la plupart des cas (17 environ sur 18), *pour obtenir une valeur approchée d'un nombre entier ou décimal avec une erreur relative moindre qu'une demi-unité décimale d'un ordre énoncé, il suffit de conserver, à partir du premier chiffre significatif à gauche, autant de chiffres plus un qu'il est marqué par l'ordre de l'unité décimale énoncée.*

Remarque II. Le même principe (III) et ses conséquences sont applicables à un nombre entier ou décimal sur la droite duquel on supprime un ou plusieurs chiffres en augmentant d'une unité le dernier chiffre conservé. Ainsi, pour obtenir une valeur du nombre 14,1421, approchée par excès avec une erreur relative moindre que 0,001, on le remplacera par 14,15; et pour obtenir une valeur du nombre 27,1828..., approchée par excès avec une erreur relative moindre qu'un demi-millième, on le remplacera par 27,19.

IV. *L'erreur absolue d'un produit* 9×5 *de deux facteurs, dont on modifie un seul facteur* 9, *en le remplaçant par une valeur* $9 + 2$ *ou* $9 - 2$, *approchée par excès ou par défaut, est égale au facteur* 5 *non modifié, multiplié par l'erreur absolue* 2 *de l'autre facteur; et l'erreur relative du même produit est égale à celle du facteur modifié.*

1°. En multipliant le nouveau multiplicande $9 + 2$ ou $9 - 2$ par le même multiplicateur 5, on a $9 \times 5 + 2 \times 5$ ou $9 \times 5 - 2 \times 5$; donc, dans l'un et l'autre cas, l'erreur absolue du produit 9×5 est 2×5 ou 5×2 (I).

2°. Pour obtenir l'erreur relative du produit 9×5, on divise son erreur absolue 5×2 par 9×5 (II), ce qui donne $\frac{2}{9}$ ou l'erreur relative du facteur 9 modifié.

V. *L'erreur absolue d'un produit* 9×5 *de deux facteurs, qu'on remplace par des valeurs* $9 - 2$ *et* $5 - 3$

approchées par défaut, est moindre que la somme des produits qu'on obtient en multipliant chacun des facteurs par l'erreur absolue de l'autre facteur; et l'erreur relative du même produit est moindre que la somme des erreurs relatives des deux facteurs.

1°. En supposant d'abord qu'on modifie le seul facteur 9 en le remplaçant par $9 - 2$, ce qui revient à remplacer 9×5 par $(9 - 2) \times 5$, l'erreur absolue du produit 9×5 sera 5×2 (IV); ensuite, si l'on remplace, dans le produit $(9 - 2) \times 5$, le facteur 5 par $5 - 3$, on obtiendra le produit $(9 - 2) \times (5 - 3)$ en commettant une nouvelle erreur absolue égale à $(9 - 2) \times 3$ (IV), et, par conséquent, moindre que 9×3; donc l'erreur absolue totale du produit 9×5 sera moindre que $9 \times 3 + 5 \times 2$.

2°. L'erreur absolue du produit 9×5 étant moindre que $9 \times 3 + 5 \times 2$, son erreur relative (II) sera moindre que

$$\frac{9 \times 3 + 5 \times 2}{9 \times 5} = \frac{9 \times 3}{9 \times 5} + \frac{5 \times 2}{9 \times 5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{9},$$

c'est-à-dire moindre que la somme des erreurs relatives des facteurs 5 et 9.

Corollaire I. *L'erreur relative d'un produit de plusieurs facteurs, qu'on remplace par des valeurs approchées par défaut, est moindre que la somme des erreurs relatives de tous les facteurs.*

Corollaire II. *L'erreur relative de la puissance d'un nombre, qu'on remplace par une valeur approchée par défaut, est moindre que l'erreur relative de ce nombre multipliée par le degré de la puissance.*

VI. *L'erreur absolue d'un quotient* $\frac{9}{5}$, *dans lequel on remplace le dividende* 9 *par une valeur* $9 + 2$ *ou*

$9-2$ *approchée par excès ou par défaut, est égale à l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur; et l'erreur relative du même quotient est égale à celle du dividende.*

1°. En divisant le nouveau dividende $9+2$ ou $9-2$ par le même diviseur 5, on a le nouveau quotient

$$\frac{9}{5}+\frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{5}-\frac{2}{5};$$

donc, dans l'un et dans l'autre cas, l'erreur absolue du quotient $\frac{9}{5}$ est égale à $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire à l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur.

2°. Pour obtenir l'erreur relative du quotient $\frac{9}{5}$, on divise son erreur absolue $\frac{2}{5}$ par $\frac{9}{5}$, ce qui donne $\frac{2}{9}$ ou l'erreur relative du dividende.

VII. *L'erreur absolue d'un quotient* $\frac{9}{5}$, *dans lequel on remplace le diviseur* 5 *par une valeur* $5+3$ *ou* $5-3$ *approchée par excès ou par défaut, est égale à ce quotient multiplié par le rapport de l'erreur absolue* 3 *du diviseur à sa valeur approchée* $5+3$ *ou* $5-3$; *et l'erreur relative du même quotient est égale à l'erreur absolue du diviseur divisé par sa valeur approchée.*

1°. En supposant qu'on remplace le diviseur 5 par $5+3$, l'erreur absolue du quotient $\frac{9}{5}$ sera

$$\frac{9}{5}-\frac{9}{5+3}=9\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5+3}\right);$$

réduisant les quotients entre parenthèses au même diviseur $5\times(5+3)$, et prenant la différence des deux quotients qui en résultent, on trouve que l'erreur absolue du

quotient est

$$\frac{9\times 3}{5\times(5+3)} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{5}\times\frac{3}{5+3}.$$

En supposant qu'on remplace 5 par $5-3$ ou par 2, on trouve, de la même manière, que l'erreur absolue du quotient

$$\frac{9}{2}-\frac{9}{2+3}=\frac{9\times 3}{2\times(2+3)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{9}{5}\times\frac{3}{5-3}.$$

2°. L'erreur absolue du quotient $\frac{9}{5}$ étant

$$\frac{9}{5}\times\frac{3}{5+3} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{5}\times\frac{3}{5-3};$$

si on la divise par $\frac{9}{5}$, on aura, pour l'erreur relative de ce quotient,

$$\frac{3}{5+3} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{5-3}.$$

Corollaire I. *Selon que le nombre qui remplace le diviseur est une valeur approchée par excès ou par défaut, l'erreur relative du quotient est plus petite ou plus grande que celle du diviseur.*

Corollaire II. *Lorsque le diviseur 7,8 étant un nombre décimal dont la partie entière 7 excède* m *fois le quotient, on remplace ce diviseur par sa partie entière, l'erreur absolue du quotient est moindre que* $\frac{1}{m}$.

Car, en supposant que 9 soit le dividende, l'erreur absolue du quotient $\frac{9}{7,8}$ sera (1°)

$$\frac{9}{7,8}\times\frac{0,8}{7}<\frac{9}{7,8}\times\frac{1}{7};$$

mais, par hypothèse, 7 excède m fois le quotient $\frac{9}{7,8}$; donc, le cinquième du quotient est un nombre moindre que $\frac{1}{m}$, et il en est de même, à plus forte raison, du produit

$$\frac{9}{7,8} \times \frac{0,8}{7}.$$

VIII. *L'erreur relative d'un quotient* $\frac{9}{5}$, *dans lequel on remplace le dividende par une valeur* $9-2$ *approchée par défaut, et le diviseur par une valeur* $5+3$ *approchée par excès, est moindre que la somme des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

Le quotient proposé et celui qui le remplace étant égaux respectivement aux produits

$$9 \times \frac{1}{5}, \quad (9-2) \times \frac{1}{5+3},$$

on voit que chacun des facteurs 9 et $\frac{1}{5}$ du premier produit a été remplacé par une valeur approchée par défaut; donc l'erreur relative de ce produit ou du quotient proposé est moindre que la somme des erreurs relatives de ses deux facteurs (V); or l'erreur relative du facteur 9 remplacé par $9-2$ est $\frac{2}{9}$; l'erreur relative du facteur $\frac{1}{5}$ remplacé par $\frac{1}{5+3}$ est moindre que $\frac{3}{5}$ (VII, corollaire I); donc l'erreur relative du quotient proposé est moindre que

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{5}.$$

MULTIPLICATION ABRÉGÉE.

IX. *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale d'un ordre énoncé, le produit de deux nom-*

bres entiers ou décimaux, on écrit, dans un ordre inverse, les chiffres du multiplicateur sous le multiplicande, de manière que le chiffre des unités simples corresponde à celui du multiplicande qui exprime des unités cent fois plus petites que celles de l'ordre énoncé; on multiplie le multiplicande successivement par chacun des chiffres du multiplicateur, à partir de la droite, en faisant abstraction des chiffres du multiplicande placés à la droite de celui qui sert de multiplicateur : on écrit chacun de ces produits partiels au-dessous du multiplicande, de manière que leurs premiers chiffres à droite soient dans la même colonne verticale; enfin, on additionne tous ces produits, considérés comme exprimant des unités cent fois plus petites que celles de l'ordre énoncé, et l'on supprime deux chiffres sur la droite du résultat, en augmentant d'une unité le dernier chiffre conservé.

En appliquant cette règle au produit

$$3,141592\ldots \times 27,1828\ldots,$$

dont on demande une valeur approchée à moins d'un dixième, on trouve 85,4 pour le produit demandé.

```
 3,141592....
....8281,72
-----------
   62,830
   21,987
      314
      248
        6
   ------
   85,385
   85,4
```

Démonstration. La partie du multiplicande écrite à la droite du premier chiffre 2 employé comme multiplicateur, étant moindre qu'un dix-millième, en omettant de la multiplier par 20, on a diminué le produit proposé d'un nombre moindre que 2 millièmes; la partie du multiplicande écrite à droite du deuxième chiffre 7 employé comme multiplicateur, étant moindre qu'un millième, en omettant de la multi-

plier par 7, on a diminué le produit d'un nombre moindre que 7 millièmes. Raisonnant de la même manière à l'égard des chiffres suivants employés comme multiplicateurs, on voit qu'on a successivement diminué le produit de trois nombres formant une somme moindre que (1 + 8 + 2) millièmes. Enfin, le multiplicande étant moindre que 10, et la partie du multiplicateur écrite à sa gauche étant moindre que (8 + 1) dix-millièmes, en omettant de multiplier le multiplicande par cette partie du multiplicateur, on a diminué le produit d'un nombre moindre que (8 + 1) millièmes; donc, en définitive, si l'on remplaçait le produit proposé par le produit 85,385 obtenu précédemment, on aurait diminué le premier produit d'un nombre moindre que (2 + 7 + 1 + 8 + 2 + 8 + 1) millièmes, ou, plus généralement, d'un nombre moindre que 101 millièmes, en supposant que 2 + 7 + 1 + 8 + 2 + 8 n'excède pas le nombre 100. De plus, si après avoir supprimé les deux premiers chiffres à droite du nombre 85,385, on le remplaçait par le nombre 85,3, on diminuerait encore le produit proposé de 85 millièmes, c'est-à-dire d'un nombre qui ne peut excéder 99 millièmes; donc, la diminution totale du produit proposé serait moindre que (101 + 99) millièmes ou que 2 dixièmes; donc, enfin, si l'on ajoute 1 dixième à 85,3, le résultat 85,4 et le produit proposé différeront entre eux d'une quantité égale à la différence entre 1 dixième et un nombre moindre que 2 dixièmes, c'est-à-dire d'un nombre moindre qu'un dixième.

Remarque. La règle précédente, connue sous le nom de *règle d'Onghtred,* suppose le cas très-général où la somme des chiffres employés au multiplicateur, augmentée du premier des chiffres négligés, n'excède pas 100. Dans le cas où cette somme serait comprise entre 100 et 1001, on verrait facilement qu'il suffirait de modifier

la règle d'Onghtred, en écrivant le chiffre des unités simples du multiplicateur sous celui qui exprime des unités mille fois plus petites que celles de l'ordre énoncé, puis en supprimant trois chiffres au lieu de deux, sur la droite du produit obtenu. Mais si cette même somme n'excédait pas 10, il suffirait de placer le chiffre des unités simples du multiplicateur sous celui qui exprimerait des unités dix fois moindres que celles de l'ordre énoncé, et alors on supprimerait un seul chiffre à la droite du produit obtenu. Enfin, il est utile d'observer qu'en intervertissant l'ordre des deux facteurs proposés, on obtiendrait la même valeur approchée, d'où il résulte qu'on pourra substituer à la limite précédente la somme des chiffres du multiplicande, jusqu'à celui qui suit immédiatement le premier chiffre à droite du multiplicateur renversé.

DIVISION ABRÉGÉE.

X. *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale d'un ordre énoncé, le quotient de la division de deux nombres entiers ou décimaux, on commence par déterminer l'ordre des plus grandes unités, et, par suite, le nombre* n *des chiffres du quotient demandé. Faisant ensuite abstraction de la virgule dans les nombres proposés, on prend sur la gauche du diviseur le plus petit nombre au moins égal à* n; *ce nombre, à la droite duquel on prend encore* n *chiffres du diviseur, forme le premier diviseur partiel; pour former le premier dividende partiel, on prend sur la gauche du dividende le plus petit nombre qui contienne le diviseur; divisant le premier dividende par le premier diviseur, on obtient le premier chiffre à gauche du quotient; on prend pour second dividende partiel le reste de la division précédente, et, pour second diviseur, le diviseur précédent privé de son dernier chiffre; et ainsi de suite jus-*

qu'à ce qu'on ait obtenu n *chiffres au quotient; alors on fait en sorte que le premier chiffre à droite exprime des unités de l'ordre énoncé.*

Soit proposé de trouver le quotient de 3,1415926535... par 0,69314718..., à moins de 0,001. On reconnaît immédiatement que, le quotient étant compris entre 1 et 10, son premier chiffre significatif exprimera des unités simples, et comme le dernier doit exprimer des millièmes, le quotient aura quatre chiffres; donc on prendra $\bar{6}9314$ pour premier diviseur, 314159 pour premier dividende, et en observant la règle précédente, on trouvera 4,532 pour le quotient demandé :

314159	$\bar{6}9314$	3 1 4 1 5 9 2 6 5,3...	$\bar{6}9$,3,1,4,7...
36903	4532	3 6 9 0 3 2 6,5,3...	4532
2248		2 2 4 8 2,6,5...	
169		1 6 9,2,6...	
31		3 1,2 6...	

Démonstration. En multipliant le dividende proposé par 1000, on ramène la question à la recherche du quotient de 3141,59... par 0,6931... à moins d'une unité; et en multipliant le nouveau dividende et le diviseur proposé par 100000, ce qui ne change pas le quotient, on est conduit à chercher, à moins d'une unité, le quotient de 314159265,3... par 69314,7.... Or ce diviseur, ayant cinq chiffres à sa partie entière et 6 pour premier chiffre, vaut au moins 60000, tandis que le quotient, n'ayant que quatre chiffres à sa partie entière, est moindre que 10000; donc la partie entière du diviseur excède six fois le quotient, et en prenant 69314 pour premier diviseur, on a augmenté le quotient d'une quantité moindre que $\frac{1}{6}$ (VII, cor. II). La première division partielle donne

le premier chiffre 4 des mille du quotient et un reste 36903265,3... qu'il faudrait diviser par 69314 pour compléter ce quotient; mais en divisant ces deux nombres par 10, on ramène l'opération à la division de 3690326,5... par 6931,4. On voit, comme précédemment, que la partie entière 6931 de ce diviseur excède six fois le quotient; donc, en prenant 6931 pour second diviseur, on a augmenté le quotient d'une quantité moindre que $\frac{1}{6}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'ayant obtenu le quotient 4532 et le reste 31,26..., on ait augmenté le quotient d'une quantité moindre que $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire moindre qu'une unité. Mais, en négligeant de diviser le dernier reste 31,26... par 69, on a diminué le quotient d'une quantité moindre que l'unité; donc, en définitive, l'erreur commise sur le quotient est moindre que l'unité; et, en divisant le nombre entier 4532 par 1000, le quotient 4,532 sera une valeur approchée du quotient proposé à moins de 0,001.

Remarque I. La règle et la démonstration précédentes n'exigent aucune modification dans le cas particulier où un dividende partiel contient dix fois le diviseur qui lui correspond. Alors on prend 10 pour quotient partiel en augmentant d'une unité le chiffre précédemment obtenu au quotient et écrivant un zéro à sa droite; et si l'on continue d'observer la règle de la division abrégée, on reconnaît immédiatement que tous les chiffres suivants du quotient seront des zéros. De plus, on est certain que le quotient ainsi obtenu est approché par excès; car le nombre formé par les chiffres déjà écrits au quotient, avant que ce cas particulier se soit présenté, ne peut être trop petit, puisqu'on a constamment employé des diviseurs trop petits.

Remarque II. L'erreur commise par excès sur le quotient, en remplaçant le diviseur 69314,7... par sa partie entière, est égale (VII) à $4532,\ldots \times \frac{0,7\ldots}{69314}$. Or le quotient 4532,... est moindre que $(4+1) \times 1000$, et la partie décimale 0,7... du diviseur est moindre que $\frac{7+1}{10}$; de plus, la partie entière du diviseur est au moins égale à 69000; donc l'erreur absolue du quotient est moindre que

$$\frac{(4+1) \times 1000 \times \frac{7+1}{10}}{69000} = \frac{\frac{1}{10}(7+1)(4+1)}{69}:$$

l'erreur commise par excès sur le quotient, en remplaçant le diviseur 6931,4 par sa partie entière, est $532,\ldots \times \frac{0,4}{6931}$; et on a

$$532,\ldots \times \frac{0,4}{6931} < \frac{\frac{1}{10}(5+1) \times 4 \times 100}{6900} = \frac{5+1}{10}\frac{4}{69} = \text{ou} < \frac{4}{69}.$$

On voit de même que la troisième erreur par excès commise sur le quotient est moindre que

$$\frac{3+1}{10} \times \frac{1}{69} = \text{ou} < \frac{1}{69},$$

et que la quatrième erreur par excès est moindre que

$$\frac{2+1}{10} \times \frac{3}{69} = \text{ou} < \frac{3}{69};$$

donc la somme des erreurs par excès commises sur le quotient est moindre que

$$\frac{1}{69}\left[3+1+4+\frac{1}{10}(7+1)(4+1)\right],$$

et, pour que cette somme soit moindre que l'unité, il suffira que le dernier diviseur 69 soit au moins égal à la somme $3+1+4$ des $n-1$ chiffres suivants, augmentée du dixième du produit $(c+1) \times (c'+1)$, c étant le $n^{ième}$ chiffre qui suit le dernier diviseur 69, et c' le premier chiffre du quotient. On pourra donc modifier la règle de la division abrégée en formant le premier diviseur partiel de la manière suivante : *Faisant abstraction de la virgule dans le nombre proposé, on marque sur la gauche du nombre qui en résulte le plus petit nombre au moins égal à la somme des* $n-1$ *chiffres suivants, augmentée du dixième du produit* $(c+1)(c'+1)$, *c étant le* $n^{ième}$ *chiffre qui suit le nombre marqué sur la gauche du diviseur, et c' le premier chiffre du quotient ; le nombre formé par les chiffres*

pris sur la gauche du diviseur et les n — 1 chiffres suivants sera le premier diviseur partiel. Cette deuxième règle de division abrégée, qui ne diffère de la première que par la manière de former le premier diviseur partiel, a sur celle-ci l'avantage de simplifier quelquefois les divisions partielles en permettant d'employer un ou deux chiffres de moins dans chaque diviseur partiel. Ainsi, par exemple, pour obtenir, à moins de 0,01, le quotient de la division du nombre $\pi = 3,14159\ldots$ par $\log 2 = 0,3010299\ldots$, il suffira de prendre 3010 (au lieu de 301029) pour premier diviseur (*). Enfin la seconde règle a aussi sur la première l'avantage de faire connaître (*rem*. III) presque toujours le sens de l'approximation, et, par suite, les chiffres exacts du quotient demandé. Mais l'énoncé plus simple de la première règle et sa démonstration plus élémentaire la mettant plus à la portée des élèves peu exercés, nous avons dû la préférer à la seconde.

Remarque III. La somme des erreurs par excès commises sur le quotient est (*rem*. II) moindre que

$$\frac{(7+1)(4+1)+4(5+1)+1(3+1)+3(2+1)}{690}$$

ou que

$$\frac{40+24+4+9}{690}=\frac{77}{690}.$$

On trouve de la même manière que cette somme d'erreurs est plus grande que

$$\frac{7\times4+4\times5+1\times3+3\times2}{700}=\frac{57}{700}.$$

De plus, l'erreur commise par défaut, en omettant de diviser le dernier reste $31,2\ldots$ par 69, est comprise entre $\frac{31,2}{69}$ et $\frac{31,3}{69}$, ou entre $\frac{312}{690}$ et $\frac{313}{90}$. Or on a $\frac{77}{690}<\frac{312}{690}$; donc 4532 est une valeur approchée par défaut à moins d'une unité, et, par suite, 2 est le chiffre exact des unités simples.

Exercices.

1. *Trouver une valeur approchée du produit* $113\,\pi$ *à moins d'un dix-millième.*

Réponse : 355. On en conclut que $\frac{355}{113}$ est une valeur de π approchée par excès à moins d'un millionième.

(*) La méthode de M. Guy exigerait l'emploi des huit premiers chiffres de log 2 pour la première division.

2. *Trouver une valeur approchée du produit* $10\pi \times 10\sqrt{2}$ *avec une erreur relative moindre qu'un millième.*

1°. On multiplie 31,41 par 14,14, et l'on conserve les quatre premiers chiffres à gauche du produit 444,1374, en augmentant le dernier d'une unité, ce qui donne 444,2.

2°. On multiplie 31,4159 par 14,1421 en plaçant le multiplicateur renversé sous le multiplicande de manière que leurs chiffres extrêmes se correspondent, et l'on trouve 444,3.

3. *Trouver l'inverse du nombre* π *avec sept chiffres décimaux exacts et en déduire une valeur approchée, à moins d'un mètre, du rayon de la terre supposée sphérique.*

1°. On divise l'unité par π en prenant 3141592 6 pour premier diviseur partiel (X, *rem.* II et III), ce qui donne 0,3183098.

2°. On double l'inverse de π, abstraction faite de la virgule, et l'on augmente le résultat d'une unité, ce qui donne 6366197 mètres.

4. *Trouver une valeur approchée du quotient de la division du nombre* 10π *par* 0,69314718... *avec une erreur relative moindre qu'un millième.*

1°. On divise 31,41 par 0,6932 en s'arrêtant au quatrième chiffre du quotient qu'on augmente de 0,01, et l'on trouve 45,32.

2°. On cherche les quatre premiers chiffres à gauche du quotient

$$10\pi : 0{,}69314718\ldots$$

en observant la règle de la division abrégée, et l'on trouve 45,32.

5. *Trouver, à moins d'une unité, le rapport du rayon d'un cercle à l'arc d'une seconde.*

Réponse : 206265 (IX).

6. *Trouver, à moins d'un millième de seconde, la valeur de l'angle au centre correspondant à l'arc équivalent au rayon.*

Réponse : $57^\circ 17' 44'',806$ (X).

7. *Quelle est la plus petite unité, entière ou décimale, à moins de laquelle on puisse obtenir le produit* $27{,}1828\ldots \times 314{,}159\ldots$ *de deux nombres dont les chiffres donnés sont exacts ?*

Réponse : Un dixième (V).

8. *Quelle est la plus petite unité, entière ou décimale, à moins de laquelle on puisse obtenir le quotient* $\dfrac{3{,}141\ldots}{0{,}3010\ldots}$ *de deux nombres dont les chiffres donnés sont exacts ?*

Réponse : Un millième (X, *rem.* II).

NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTES DES COURBES GAUCHES;

Par M. Ossian BONNET.

M. Bouquet a démontré, dans le tome XI du Journal de M. Liouville (p. 125, 1816), que la distance de deux tangentes consécutives à une courbe gauche est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à la distance des points de contact. On peut reconnaître l'exactitude de ce résultat d'une manière extrêmement simple.

Soient une courbe gauche C; MT, M'T' ses tangentes aux deux points infiniment voisins M et M'; OO' la plus courte distance de ces deux droites. Projetons sur un plan parallèle à OO', et soient c la projection de la courbe, mt, $m't'$ les projections des deux tangentes, oo' la projection de OO'. Il est clair que mt, $m't'$ seront perpendiculaires à oo', par suite parallèles; mais ces deux lignes sont les tangentes à la courbe c, aux points m et m', projections de M et M'; donc, entre m et m', la courbe c présente une inflexion en un certain point que nous appellerons n. Cela posé, rapportons la courbe c à la tangente au point n comme axe des x, et à la parallèle à oo' menée par n comme axe des y. L'équation de cette courbe sera de la forme

$$y = ax^3 + bx^4 + \ldots,$$

et l'ordonnée à l'origine de la tangente à cette courbe, dont l'expression générale est

$$y - x\frac{dy}{dx},$$

sera, pour les points m et m', de l'ordre du cube de l'abscisse de ces points, et par conséquent de l'ordre du cube de l'arc mm' ou de l'arc MM'; donc la différence de ces ordonnées à l'origine, ou oo', qui est égale à OO', sera aussi de l'ordre du cube de MM', comme il fallait le démontrer.

Je me suis proposé, pour compléter le théorème de M. Bouquet, de déterminer la valeur même de la plus courte distance OO'. Voici le résultat que j'ai obtenu, ainsi que quelques autres du même genre, dont la connaissance me paraît d'une certaine importance dans la géométrie des infiniment petits.

« La distance OO' des tangentes à la courbe C aux deux points infiniment voisins M et M', est égale au douzième du produit de l'élément MM' de l'arc de la courbe par l'angle de contingence, par l'angle de torsion.

» L'angle de la perpendiculaire commune OO' avec l'axe du plan osculateur au point M, est la moitié de l'angle de torsion.

» La distance du point M' au plan osculateur en M est le sixième du produit de l'élément de l'arc par l'angle de contingence, par l'angle de torsion, c'est-à-dire le double de la distance OO' des deux tangentes en M et M'.

» L'angle de la tangente en M' avec le plan osculateur en M est la moitié du produit de l'angle de contingence par l'angle de torsion.

» L'angle du plan mené par le point M' et la tangente en M avec le plan osculateur en M, est le tiers de l'angle de torsion.

» L'angle de la tangente en M avec l'intersection des plans osculateurs en M et M' est égal à la moitié de l'angle de contingence, c'est-à-dire à l'angle de la tangente en M avec la corde MM'.

» La distance du point M à l'intersection des plans osculateurs

lateurs en M et M' est égale au sixième du produit de l'élément de l'arc par l'angle de contingence. »

Etc.

Tous ces résultats s'obtiennent simplement en rapportant la courbe C à la tangente au point M comme axe des x, à la normale principale au même point comme axe des y, et à la binormale au même point comme axe des z. Pour cela on remarque qu'en exprimant les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe en fonction de l'arc s compté à partir du point M, et négligeant les puissances de s supérieures à la troisième, on a d'abord

$$(1) \quad x = s + \alpha s^2 + a s^3, \qquad y = b s^2 + b' s^3, \qquad z = c s^3,$$

car

$$dx = ds, \qquad dy = dz = d^2 z = 0,$$

pour $s = 0$.

Puis, à cause de

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

c'est-à-dire

$$(1 + 2\alpha s + 3 a s^2)^2 + (2 b s + 3 b' s^2)^2 + 9 c^2 s^4 = 1,$$

on voit que

$$\alpha = 0, \qquad 6a + 4b^2 = 0.$$

Enfin, appelant ρ et r les rayons de première et de seconde courbure, on trouve facilement

$$\rho = \frac{1}{2b}, \qquad r = \frac{b}{3c}.$$

Ceci admis, la démonstration des propriétés énoncées se présente d'elle-même.

Note. La géométrie infinitésimale a donné naissance au calcul différentiel et l'a perfectionné. Newton dans les *Principia*, et Euler dans la *Methodus inveniendi lineas* sont des chefs-d'œuvre en ce genre. Depuis quelques années, cette branche est cultivée avec prédilection par des esprits distingués, en France et au dehors. Le moment semble venu de travailler à un Traité méthodique de géométrie infinitésimale : l'analyse découvre, généralise, abrége; la géométrie éclaircit et abrége aussi, surtout par l'emploi *légitime* de la hiérarchie infinitésimale. Tm.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE CALCUL DÉCIMAL.

Simon Stevin.

L'origine de la numération *décuple parlée* (*) se perd dans la nuit des temps. La numération *décuple écrite* nous a été transmise par les Arabes vers le XIIe ou le XIIIe siècle, et n'a été propagée que dans le XVe ou le XVIe siècle. La numération décimale écrite date du XVIe siècle et a été inventée par Simon Stevin, car il a le premier compris et fait comprendre l'utilité d'une notation fondée sur cette division. Il est né à Bruges vers 1548, et est mort en 1620, probablement à la Haye. On trouve cette découverte dans l'ouvrage suivant :

I. *Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin, augmentées par Albert Girard.*

Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin, de Bruges, où sont insérées les Mémoires mathématiques esquelles se sont exercé le très-haut et très-illustre prince Maurice de Nassau, prince d'Aurenge, gouverneur des provinces des Païs-Bas unis, général par mer et par terre, etc.; le tout reveu, corrigé et augmenté par Albert Girard Samielois (**), *mathématicien.* A Leyde, chez Bonaventure et Abraham Elzevier, imprimeurs ordinaires de l'Université. *Anno* CIↃIↃCXXXIV, in-fol. de IV et de 882 pages, de 1 à 204 et de 1 à 678.

La dédicace aux États Généraux et au prince d'Aurenge,

(*) De même qu'on dit système binaire, ternaire, on doit dire système décennaire, qui comprend les entiers décuples et les fractions décimales.
(**) De Saint-Mihiel.

frère du prince Maurice, est signée par la veuve et les onze enfants laissés par Albert Girard, mort l'année précédente, 1633 (*), et qui a traduit du flamand les œuvres de Stevin. L'ouvrage est divisé en six volumes ou parties.

1°. L'arithmétique contient la computation des nombres vulgaires et aussi l'algèbre (1-112);

2°. Les six livres d'algèbre de Diophante; quatre traduits par Stevin et deux par Girard (113-174);

3°. La practique d'arithmétique, contenant les Tables d'intérêts, la *disme*, etc. (175-204) : c'est la fin du premier volume.

Viennent ensuite les Mémoires du prince Maurice; la pagination recommence.

II. La cosmographie, triangles, géographie, astronomie (1-340).

III. Géométrie practique (341-432).

IV. Statique avec un appendice sur la statique de la *chalinothlipse*, statique du frein du cheval (433-520).

V. Optique (521-572).

VI. Fortification (573-678).

Revenons à la practique d'arithmétique (page 175). On y trouve des Tables d'intérêt composé, et ensuite, à la page 206, *la disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompus, tous comptes se rencontrants aux affaires des hommes, premièrement descripte en flameng et maintenant convertie en françois par Simon Stevin, de Bruges*. Il dédie cet ouvrage aux astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, gavieurs (**), stéréométriens en général, maistres de monnaye et tous marchands.

Stevin avait déjà publié en flamand la *Disme*, à Leyde en 1585, à la suite de son arithmétique.

(*) C'est à tort que Montucla place en cette année la mort de Stevin.

(**) Jaugeurs.

Il s'excuse d'offrir à Leurs Seigneuries si peu de chose. Cependant il croit pouvoir dire, sans être accusé de Philautie, que l'invention est très-utile. L'auteur d'une des plus belles, des plus utiles inventions inscrites dans les annales de l'esprit humain, s'énonce avec plus de modestie qu'on n'en rencontre quelquefois aujourd'hui chez l'inventeur d'une soupape.

Définitions et opérations.

Définition I. *Disme est une espèce d'arithmétique inventée par la disième progression, consistents en caractères des chiffres par lesquels se décrit quelque nombre et par laquelle on depesche par nombres entiers, tous comptes se rencontrants aux affaires des hommes.*

Définition II. *Tout nombre entier se dit* commencement. *Son signe est* [0].

Explication. 364 [0] *veut dire que* 364 *est le commencement d'un nombre.*

Définition III. *Chaque disième partie de l'unité de* commencement, *nous la nommons* prime, *et son signe est tel* [1]; *et chaque disième partie de l'unité de prime, nous la nommons* seconde, *son signe est* [2], *et ainsi des autres de chaque disième partie de l'unité de son signe précédent, toujours en l'ordre un davantage.*

Explication. 3 [1] 7 [2] 5 [3] 9 [4], *trois primes sept secondes cinq tierces neuf quartes.*

Opération. *Addition.*

```
 [0][1][2][3]
  27847
  37675
 875782
 ------
 941304
```

Il fait de même les trois autres opérations.

La disme est renfermée en trois pages; vient ensuite un appendice ou application à l'arpentage. Il divise la verge en prime, seconde, tierce, et la circonférence en 360 *commencements*, et le degré en prime, seconde, tierce, et dit qu'il publiera des Tables astronomiques ainsi calculées. Il divise de même la livre en prime, seconde, etc., et termine ainsi : « *Chaque personne peut exercer pour soy même la disième partition sans qu'il sera mestier d'en être donné par le magistrat quelque ordre général.... Pourtant considérant sa grande utilité, ce seroit chose louable, si quelcuns, comme ceux qui en attendent la plus grande commodité, sollicitoyent de la faire mettre en effect; à sçavoir qu'en joignant les vulgaires partitions qu'il y a maintenant des mesures, poids et argent (demeurant chaque capitale, mesure, poids et argent, en tous lieux immuables), l'on ordonnoit légitimement par les supérieurs, la susdite disième partition, afin que chacun le pourroit user.*

« *Il avanceroit aussi les choses si les valeurs d'argent, principalement ce qui se forge de nouveau, fussent values de quelque prime, seconde, etc.; mais si tout cecy ne fust pas mis en œuvre si tost comme nous le pourrions souhaiter, il nous contentera premièrement qu'il fera du bien à nos successeurs, car il est certain que si les hommes futurs sont de telle nature, comme ont été les précédens, qu'ils ne seront pas toujours négligens en leur si grand avantage.* »

Le génie de Stevin planait sur ses contemporains; deux siècles se sont écoulés avant que les *hommes futurs* aient réalisé le vœu de l'illustre Belge. Le bien le plus évident ne s'improvise pas, ne s'impose pas à des esprits non préparés par le grand *mûrisseur* de toutes choses, par le temps. C'est ce que nos *impatients*, fléaux de notre époque, n'ont jamais su, jamais voulu comprendre.

Stevin considère les fractions décimales comme des nombres complexes, pour lesquels aussi nous avons des signes, des *apices* servant à distinguer les livres, sous et deniers; mais les signes de Stevin sont incommodes et ne lient pas ostensiblement le système décimal au système décuple. Il a laissé la gloire d'établir une liaison complète, indépendante de signes, à une femme française.

Stevin est le sujet de deux Notices instructives publiées à Bruxelles. Nous devons la première aux investigations érudites de M. Félix-Victor Goethals, bibliothécaire de la ville de Bruxelles. C'est une biographie et une appréciation complètes des ouvrages de Stevin; mais il me semble que c'est à tort qu'on revendique pour Regiomontanus l'invention du calcul décimal. Ce célèbre astronome a proposé seulement d'appliquer cette division décimale aux calculs des sinus; c'est ce que dit Stevin lui-même (*Géographie,* p. 108). Il y a loin de là à l'application générale, à l'extension du système décuple de gauche à droite vers le système décimal, c'est là l'idée fondamentale qui appartient à Stevin. C'est avec peine qu'on lit (page 50) une réflexion désobligeante pour un célèbre géomètre français, dont on ne saurait *trop louer* la science, la sagacité et l'impartialité (*). Il est de Chartres et non de Nantes.

La seconde Notice est sortie de la plume savante et élégante du Secrétaire perpétuel de l'Académie de Bruxelles. Les nombreuses découvertes de Stevin sont présentées d'une manière précise, et toutefois très-claire et satisfaisante. Il est singulier que pour un homme aussi célèbre, on ne connaisse ni la date précise de sa naissance, ni le lieu de sa mort. « Il a passé comme ces brillants » météores qui, pendant les nuits, sillonnent la voûte

(*) Stevin est cité avec éloge six à sept fois dans l'*Histoire des méthodes.*

» des cieux, et ne laissent, pour marque de leur passage, » qu'un trait lumineux dont l'œil chercherait en vain à » saisir les deux extrémités; » c'est ainsi que termine le savant géomètre, directeur de l'observatoire royal de Bruxelles.

MARIE CROUS.

Abrégé recherche de Marie Crous, pour tirer la solution de toute proposition d'aritmétique, dependantes des reigles y contenues : avec quelques propositions sur les changes, escontes, interest, compagnies, associations, payements, departements, de deniers, meslanges, bureau des monnoyes et thoisages, divisé en trois parties. Ensemble un advis sur les dixmes ou dixièmes, du sieur Stevin. A Paris, chez Jacques Auvray, M[d] libraire vis-à-vis du *Cheval de Bronze*, et sur le Pont-Neuf au *Prince d'Orenge*. MDCXLI. In-8 de 144 pages (*).

L'ouvrage commence par une Épître à M[me] de Combalet; l'auteur offre à cette dame, outre cet Abrégé, un livre d'écriture et encore un pot de fleurs, fait d'une *seule main*. L'Épître est suivie d'un « *Advis aux filles mes compagnes;* » là elle dit qu'elle fait ce livre « *pour essayer à soulager celles qui s'exercent en cette science, tant pour la nécessité de leurs affaires que pour le contentement de leur esprit, d'un embarras de plusieurs lettres inutiles*, » et annonce que si elle peut épargner quelques heures de ses devoirs ordinaires, elle publiera un livre d'exemple en lettres françaises et italiennes. Ainsi Marie Crous était à la fois maîtresse d'écriture et de calculs; il fallait alors enseigner à la fois la manière de faire les lettres et les chiffres, deux exercices peu répandus. Les chiffres étaient d'invention relativement récente, et peu de personnes savaient écrire. La réunion de ces deux enseignements subsiste même encore.

(*) J'ai eu à ma disposition l'exemplaire de la bibliothèque Mazarine, n° 30047.

La 1re partie (1-32) de l'ouvrage est remplie de *démonstrations* ainsi nommées, sans raisonnements; on *montre* seulement comment il faut faire les opérations : tout roule sur les *quatre* règles, et l'on indique la manière de faire plusieurs opérations simultanément. Le premier exemple est 900 moins 784 plus 230; c'est ce que l'auteur appelle *addition de soustraction;* le second exemple est 9 fois 972 plus 683; c'est une *addition de multiplication;* elle effectue d'une seule opération le produit 964.875.

Cette partie est terminée par ce qu'elle nomme *division de dénomination* (p. 21). L'exposé de cette opération est très-obscur; voici en quoi cette opération consiste, écrite algébriquement. Soient a le dividende, b le diviseur, q le quotient par *excès*. On a l'identité

$$b = a \cdot \frac{1}{q} + a \cdot \frac{1}{\left(\frac{aq}{r}\right)};$$

ainsi b est la $q^{ième}$ partie de a plus la $\frac{1}{\left(\frac{aq}{r}\right)}^{ième}$ partie de a; elle choisit pour exemple

$$a = 121770, \quad b = 176;$$

alors

$$q = 692, \quad r = 22, \quad \frac{aq}{r} = 38330220;$$

d'où

$$176 = \frac{1}{692} \cdot 121770 + \frac{1}{38330220} \cdot 121770.$$

Elle résout ensuite ce problème intéressant, reproduit par Lambert et M. Binet : Soient a le dividende, b le di-

viseur, q le quotient, r le reste; on a

$$a = bq + r, \quad \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b};$$

faisons successivement

$$a = 10 r q_1 - r_1, \quad a = 10 r_1 q_2 - r_2, \quad a = 10 r_2 q_3 - r_3, \text{ etc.,}$$

on obtient

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{10 q_1} + \frac{r_1}{10 q_1}\right) = q + a \cdot \frac{1}{b.10 q_1} + \frac{r_1}{b.10 q_1},$$

$$\frac{r_1}{b.10 q_1} = \frac{a}{b.10 q_1 . 10 q_2} + \frac{1}{b.10 q_1} \frac{r_2}{10 q_2},$$

$$\frac{a}{b} = q + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{10 q_1} + \frac{1}{10 q_1 . 10 q_2}\right] + \frac{1}{b.10 q_1} \cdot \frac{r_2}{10 q_2},$$

et, en général,

$$\frac{a}{b} = q + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{10 q_1} + \frac{1}{10 q_1 . 10 q_2} + \frac{1}{10 q_1 . 10 q_2 . 10 q_3} + \ldots\right],$$

et c'est ce qu'elle nomme aussi *division de dénomination.*

La 2[me] partie (39-69) contient la règle de trois et ses applications, escontes, change, meslanges, reduction de monnoie, etc.

Pour faire la règle de trois, elle emploie la *division de dénomination.* Exemple : $a : b :: c : x$. Elle cherche comment on forme b de a, et trouve, par *division de dénomination,* comme ci-dessus,

$$b = a\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right);$$

d'où

$$x = c\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

C'est la méthode de Pestalozzi, très-expéditive pour les calculs de tête.

A la page 46, elle cite cet ouvrage : *Broyer, Arithmetique des marchands;* extraction des racines carrées, p. 67.

La 3[me] partie contient diverses applications des deux parties; à la page 91, on donne la règle de trois *rebource* (inverse).

A ce premier ouvrage est joint le suivant, le plus important :

Advis de Marie Crous *aux filles exersants l'arithmetique sur les dixmes ou dixiemes du sieur Stevin,* contenant plusieurs advertissements, demonstrations et propositions, esquelles est declaré comment elles se peuvent servir de la partition des dixmes, sans le changement des divisions des monnoyes, poids et mesures : par le moyen de cinq tables y contenues. Le tout renvoyé à mon abrégé pour y estre très utile. A Paris, MDCXXXVI. In-8 de 72 pages et cinq tables.

Nous avons vu que l'*Abrégé* auquel on renvoie est de 1641; c'est donc une seconde édition : le privilége qui est à la fin est du 31 décembre 1635. Il paraît qu'on a réimprimé l'*Abrégé* et qu'on n'a pas réimprimé l'advis sur les dixmes. Cet advis est dédié à mademoiselle Charlotte de Caumont, damoiselle de La Force; Marie Crous était sa maîtresse d'écriture. Vient ensuite une allocution aux *filles mes compagnes.* On y lit cette réflexion remarquable : « *Mais il me semble que suivant cet advis, ce seroit aux souverains à changer la division de leurs monnoyes, poids et mesures; car pour l'auneur et le thoiseur, avoir marqué leurs mesures en dixiemes sur un costé où les marques du souverain ne sont, il ne leur seroit pourtant permis d'y mesurer pour la distribution de leurs marchandises.* »

Marie Crous conserve les dénominations de Stevin, et appelle les dixièmes, centièmes, etc., des primes, se-

condes, tierces; mais elle abandonne ses signes, sépare la partie décimale des entiers par un point, et remplace par les zéros (*) les unités décimales manquantes; changement fondamental qui a donné au calcul décimal sa véritable forme, encore conservée, excepté que le point a été remplacé assez récemment par une virgule; ce qui est peu de chose.

La 1re table est la réduction, en partie décimale, de la livre, des sous et deniers;

La 3me table est la réduction, en partie décimale, pour les poids de marcs;

La 4me table est la réduction, en partie décimale, pour la toise;

La 5me table est la réduction, en partie décimale, pour la division du temps;

La 2me table est la réduction, en décimales, des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc.; $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, avec $\frac{1}{3} = 3$ primes, 3 secondes, 3 tierces, etc.

L'existence de Marie Crous a été, sans contredit, très-utile au pays, profitable aux savants, aux industriels, aux commerçants, à tout le monde : ne serait-il pas convenable, même de toute justice, lorsqu'on a tant de noms à donner à de nouvelles rues, à d'anciennes rues, d'inscrire quelque part le nom de Marie Crous? L'édilité parisienne, si éclairée, si intelligente, adopterait certainement cette idée, si elle était appuyée par quelques hommes connus. D'ailleurs, la noble fille du peuple ayant gagné péniblement sa vie par un travail honnête, et qui a marqué son passage par un bienfait durable, universel, ne mérite-t-elle pas un témoignage d'honneur, aussi bien que les Montespan, les Pompadour, les Du-

---

(*) Elle appelle les zéros des *nuls,* comme les Allemands.

barry, qu'on voit figurer au Musée de Versailles, dédié aux *gloires* de la France?

DE LA LONDE.

L'Arithmétique des ingénieurs contenant le calcul des toisés, de la maçonnerie, des terres et de la charpente, par M. *de la Londe;* seconde édition. Paris, Denis Nion, M[d] libraire au premier pavillon du Collège Mazarini, devant l'hostel de Conty, à l'*Image S[te] Monique.* MDCLXXXIX. In-4 de 144 pages, plus les tables et 2 pages d'explication.

La 1[re] édition est de 1685.

C'est le premier ouvrage où l'on enseigne le calcul décimal aux *ingénieurs militaires*. Dans la préface, l'auteur dit qu'il n'enseignera pas la racine cubique aux ingénieurs, *puisqu'ils n'en ont jamais besoin,* et il renvoie ceux qui veulent l'apprendre comme chose *curieuse,* aux Éléments du père Prestet. C'est bien là l'esprit de nos perfectionnements actuels. Il dit être le premier qui ait traité du toisé, et il ne donne que la 1[re] partie, n'ayant pas le temps de faire la seconde.

Chapitre I[er]. — (1-3). Numération. Il y est question de millions et de billions.

Chap. II. — (3-18). Les quatre premières règles; le diviseur est écrit au-dessous du dividende, le reste au-dessus et le quotient à droite.

Chap. III. — (19-32). Pratique des fractions. Il regarde la recherche du plus grand commun diviseur comme *peu nécessaire* aux ingénieurs. On croit lire le fameux Rapport qui précède les fameux programmes. Lorsque les vieux praticiens dominent sur la science, il lui assigne volontiers pour horizon, celui de leur intelligence vieillie. Les siècles se suivent, et les hommes se ressemblent

Chap. IV. — (33-48). Ce chapitre a été malheureusement arraché dans l'exemplaire qu'on m'a prêté. L'ouvrage de L. Gougeon, dont nous parlerons ci-dessous, peut tenir lieu de ce chapitre manquant.

Chap. V. — (49-101). Logistique des nombres de diverses espèces; contient le calcul des nombres complexes.

Chap. VI. — (101-109). Toisé de la charpente; bois équarris, bois ronds, etc.

Chap. VII. — (110-117). Règle de trois; proportion.

Chap. VIII. — (118-121). Règle de trois inverse. On voit qu'en 1685, trois livres de pain coûtaient quatre sols, et le quintal de gros fer $16^{\#}\ 13^{ʃ}\ \frac{1}{2}$; tous les exemples sont relatifs aux entrepreneurs, trésoriers, capitaines, etc.

Chap. IX. — (122-133). Règle de trois composée.

Chap. X. — (134-139). Règle de société.

Chap. XI. — (140-144). Règle d'extraction de racine carrée.

1re table; espèce de table de Pythagore pour les pieds, pouces, lignes;

2me table; parties décimales de la toise;

3me table; parties décimales du pied;

4me table; parties décimales de la livre;

5me table; pour la mesure des bois équarris.

Ce qui annonce, dans M. de la Londe, un esprit distingué, c'est qu'il a adopté et propagé le système de Stevin, alors une innovation. En 1676, il commandait le génie à la défense de Philisbourg, et fut emporté par un boulet de canon au siége de la même ville en 1688 : c'est consigné dans un état de Vauban.

Je dois ces derniers renseignements à la vaste érudition militaire de mon ami et ancien camarade d'école Augoyat, colonel du génie, en retraite, conservateur des plans-reliefs des places de guerre à l'Hôtel des Invalides. (*Voir* Allent, *Histoire du Génie*, pages 137, 164, 221, 225.)

L. GOUGEON.

Parallèle de l'arithmétique vulgaire et d'une autre moderne, inventée par M. de la Londe, *ingénieur général de France; où l'on verra en abrégé la différence qu'il y a de l'une à l'autre par la facilité ou difficulté qui se trouvera dans la brieveté ou longueur de leurs différentes pratiques, avec un ample abrégé sur la fin, de l'arithmétique en dixmes, pour l'usage de messieurs les gentils-hommes de l'École royale de Longwy;* seconde édition, revue et corrigée. — *Magnus Dominus noster et magna virtus ejus et sapientiæ ejus non est numerus.* Ps. 146, v. 5. A Liège, chez Jean-François Bronkart, M[d] libraire proche le marché; 1695, in-12 de 259 pages (*).

Dans l'appendice, la pagination recommence (1-32), et c'est la seule partie qui présente de l'intérêt; elle est dédiée à M[r] de Vauban et signée *L. Gougeon.* Voici le titre : *Abregé de l'arithmetique en Dixme, par la pratique de laquelle les moins versés pourront eviter le calcul qui leur est pénible aux fractions de l'arithmétique vulgaire, fait en faveur et pour le soulagement de MM. les Cadets gentils-hommes de l'École royale de Longvuy.*

Pour écrire 0,243579 (p. 2), il met $2'$, $4''$, $3'''$, 5^{iv}, 7^{v}, 9^{vi}, et prononce deux primes quatre secondes trois tierces, etc., comme Stevin. Cependant ensuite, au lieu de $4'$, $3''$. $2''$, il écrit 0|432; au lieu de $7''$, il met 0|07, et se sert des deux notations. Mais pour les quatre opérations, il n'em-

(*) Des compagnies de cadets dans les places frontières, et des gardes marines dans les ports, furent instituées et composées de jeunes gens qui apprenaient tous les arts convenables à leur profession, sous des maîtres payés du trésor public (*Siècle de Louis XIV,* chap. XIV, année 1682); c'est le point de départ des Écoles militaires en France.

ploie que la dernière notation, et dans la multiplication, il ne désigne que la dernière décimale. Exemple : 4256^{IV} à multiplier par $38'''$; cela revient à multiplier 0,4256 par 0,038. On voit que la méthode de Marie Crous (de 1641) n'était pas encore répandue en 1695 (*).

THÉORÈME SEGMENTAIRE SPHÉRIQUE

(voir t. IX, p. 363) ;

Par M. PROUHET.

1. Par les trois sommets d'un triangle sphérique, on mène aux côtés respectifs opposés trois arcs de grand cercle se coupant en un point situé dans l'intérieur du triangle; s, s', s'' sont les segments comptés du point commun d'intersection aux angles, et σ, σ', σ'' les segments correspondants comptés du même point aux côtés; on a la relation

$$\frac{\sin s \cos \sigma}{\sin (s+\sigma)} + \frac{\sin s' \cos \sigma'}{\sin (s'+\sigma')} + \frac{\sin s'' \cos \sigma''}{\sin (s''+\sigma'')} = 1.$$

(Stubbs.)

Démonstration. Soient ABC le triangle, O le point commun d'intersection. On peut considérer ce point O comme le point d'application de trois forces centrales P, Q, S, appliquées respectivement aux sommets A, B, C; et R étant la résultante, on aura

$$\frac{\sin \sigma}{\sin (s+\sigma)} = \frac{P}{R}, \quad \frac{\sin \sigma'}{\sin (s'+\sigma')} = \frac{Q}{R}, \quad \frac{\sin \sigma''}{\sin (s''+\sigma'')} = \frac{S}{R};$$

(*) *Ingénieur général de France;* ingénieur qui avait le titre de général.

multipliant respectivement par $\cos\sigma$, $\cos\sigma'$, $\cos\sigma''$, et ajoutant, on obtient

$$\frac{P\cos\sigma + Q\cos\sigma' + S\cos\sigma''}{R} = 1.$$

C. Q. F. D.

Si les arcs partant des sommets divisent le triangle en deux parties équivalentes, on a

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\sigma}{\tang\frac{1}{2}s} = \frac{\tang\frac{1}{2}\sigma'}{\tang\frac{1}{2}s'} = \frac{\tang\frac{1}{2}\sigma''}{\tang\frac{1}{2}s''} = 1.$$

2. Le théorème de M. Stubbs peut aussi se démontrer d'une manière très-simple : en faisant passer par le point commun d'intersection un plan tangent à la sphère, et faisant la projection centrale du triangle sphérique sur ce plan, on obtient un triangle rectiligne qui donne, immédiatement,

$$\frac{\tang\sigma}{\tang s + \tang\sigma} + \frac{\tang\sigma'}{\tang s' + \tang\sigma'} + \frac{\tang\sigma''}{\tang s'' + \tang\sigma''} = 1.$$

3. Dans un article très-instructif de M. Collete (t. VIII, p. 435), il s'est glissé une erreur de signe non corrigée dans l'*errata*. Il faut lire

$$\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}C = -\cos\frac{1}{2}c\,\cos P\,;$$

ce qui est d'ailleurs évident, puisque $\cos P$ est négatif.

Peut-être y aurait-il lieu de faire, pour la géométrie sphérique, ce que Ceva a fait pour la géométrie rectiligne, dans son livre : *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*.

Note. Les coordonnées d'un point pouvant être considérées comme les composantes d'une force dirigée vers l'origine, M. Möbius a imaginé un

algorithme sphérique, d'après cette considération statique, très-commode en beaucoup d'occasions et surtout lorsqu'il s'agit de changer les axes : voir *Uber die grandformen der linien der Dritten ordnung;* c'est-à-dire : *Sur les formes fondamentales des lignes du troisième ordre,* p. 25; Leipzig, 1849; idée que le savant directeur de l'observatoire de Leipzig avait déjà publiée en 1846.

NOTE SUR LES THÉORÈMES QUI SERVENT DE BASE A LA RECTIFICATION DES COURBES;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

Courbes planes.

On peut appliquer à une courbe plane quelconque la démonstration de ce théorème, qu'on ne donne ordinairement que pour un arc de cercle :

La limite du rapport d'un arc indéfiniment décroissant à sa corde est égale à l'unité.

En effet, soient

AB un arc de courbe dont l'extrémité A reste fixe et dont l'extrémité B varie sur cette courbe;

s, c et t les longueurs de cet arc, de sa corde et de la brisée ACB formée par les tangentes en A et B;

α le plus grand des deux angles adjacents au côté AB dans le triangle ACB qui renferme l'arc AB supposé assez petit.

On a évidemment

$$c = \mathrm{AC}.\cos \mathrm{A} + \mathrm{BC}.\cos \mathrm{B},$$

et, par conséquent,

$$c > t \cos \alpha.$$

Mais on peut admettre que $t > s$; ainsi l'inégalité qui précède donne, *à fortiori*,

$$(1) \qquad c > s \cos \alpha,$$

d'où

$$\frac{s}{c} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Donc, comme $\frac{s}{c}$ ne peut tomber au-dessous de 1, et comme $\frac{1}{\cos \alpha}$ tend vers 1 (limite inférieure), lorsque α tend vers 0, on a

$$\lim \frac{s}{c} = 1,$$

quand s tend vers zéro. C. Q. F. D.

On démontre de même que :

La limite du rapport de la différence entre un arc et sa corde au cube de l'arc est inférieure à la moitié du carré de la courbure.

Premièrement, on déduit *à fortiori* de l'inégalité (1) que

$$c > s\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

car $\cos \alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$; et, par conséquent, on a

$$(2) \qquad \frac{s - c}{s^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^2.$$

D'autre part, les normales en A et B, à la courbe que l'on considère, se coupent en un point D de la circonférence circonscrite au triangle ACB, et en désignant par σ l'arc ACB de cette circonférence, dont le diamètre est CD, on a

$$\alpha < \frac{\sigma}{\text{CD}},$$

d'où

$$(3) \qquad \left(\frac{\alpha}{s}\right)^2 < \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \cdot \frac{1}{\overline{\mathrm{CD}}^2}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les inégalités (2) et (3), il vient

$$\frac{s-c}{s^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \frac{1}{\overline{\mathrm{CD}}^2}.$$

Or, $\frac{\sigma}{s} = \frac{\sigma}{c} : \frac{s}{c}$ tend vers l'unité, et CD tend vers le rayon de courbure R correspondant au point A, lorsque s tend vers zéro ; donc on a

$$\lim \frac{s-c}{s^3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

C. Q. F. P., car la courbure en A est exprimée par $\frac{1}{\mathrm{R}}$.

D'après cela :

La différence entre un arc infiniment petit de courbe plane et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins par rapport à l'arc.

Aux points d'inflexion où R est infini, $s - c$ est infiniment petite du cinquième ordre au moins, si l'on regarde $\frac{1}{\mathrm{R}}$ comme un infiniment petit du même ordre que s ; et notre démonstration tombe en défaut lorsque $\mathrm{R} = 0$.

Courbes à double courbure.

Ce qui précède s'étend à des courbes à double courbure. En effet, soient

AB un arc de courbe quelconque ;
s et c la longueur de cet arc et celle de sa corde ;

AC la projection de AB sur un plan P qui passe par le point A, différant du plan normal en ce point et ne coupant pas la courbe entre A et B;

σ et γ les longueurs de AC et de sa corde;

AT et AS la tangente à AB en A, et la projection de cette tangente sur le plan P.

Supposons que le cylindre projetant se développe sur le plan TAS en même temps que AC se rectifie; et soient encore

AC′ la partie de AS sur laquelle s'étend AC;

AB′ ce que devient l'arc AB, et il faut admettre que la longueur de cet arc ne change pas dans le développement du cylindre;

c' la longueur de la corde de AB′;

enfin α et α' les angles BAC et B′AC′.

Les triangles rectangles ACB et AC′B′ donnent

$$\gamma = c.\cos\alpha, \quad \sigma = c'.\cos\alpha';$$

et, par conséquent, on a

$$(1) \qquad \frac{s}{c} = \frac{s}{c'}\cdot\frac{\sigma}{\gamma}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}.$$

Or, lorsque s tend vers zéro, $\frac{s}{c'}$ et $\frac{\sigma}{\gamma}$ tendent vers l'unité (courbes planes), et $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$ tend aussi vers 1, car α et α' se rapprochent tous deux indéfiniment de l'angle TAS; donc on a

$$\lim\frac{s}{c} = 1,$$

comme pour une courbe plane.

Secondement, l'équation (1) donne

$$\frac{s-c}{s}=\frac{s\sigma.\cos\alpha-c'\gamma.\cos\alpha'}{s\sigma.\cos\alpha},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{s-c}{s}=\frac{s-c'}{s}+\frac{\sigma-\gamma\dfrac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}}{\sigma-\gamma}\cdot\frac{c'}{s}\cdot\frac{\sigma-\gamma}{\sigma};$$

et, en divisant par s^2, il vient

$$\frac{s-c}{s^3}=\frac{s-c'}{s^3}+\frac{\sigma-\gamma\cdot\dfrac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}}{\sigma-\gamma}\cdot\frac{c'}{s}\cdot\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2\cdot\frac{\sigma-\gamma}{\sigma^3}.$$

s tendant vers zéro, $\dfrac{s-c'}{s^3}$ et $\dfrac{\sigma-\gamma}{\sigma^3}$ tendent vers de certaines limites qui sont finies en général et inférieures respectivement à $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R'^2}$ et $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho^2}$, si l'on représente par R′ et ρ les rayons de courbure de la transformée plane et de la projection de la courbe que l'on considère (courbes planes); en même temps, $\dfrac{\sigma-\gamma\cdot\dfrac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}}{\sigma-\gamma}$, $\frac{c'}{s}$ et $\frac{\sigma}{s}=\frac{c'}{s}\cos\alpha'$ tendent vers l'unité; donc

$$\lim\frac{s-c}{s^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{\rho^2}\right),$$

et, par conséquent :

La différence entre un arc infiniment petit de courbe quelconque et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins, en général.

QUESTION 258 (MICHAEL ROBERTS)

(voir t. X, p. 357);

PAR M. H. FAURE.

THÉORÈME. *Lorsqu'une suite d'ellipsoïdes sont inscrits dans un cône de révolution qu'ils touchent suivant la même ligne de contact, on a entre leurs demi-axes la relation*

$$\frac{b^3}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} = \textit{constante}.$$

Démonstration. Si l'on circonscrit à un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

un cône de révolution, le sommet S de ce cône se trouve sur l'hyperbole focale de la surface. Si l'on suppose $a>b>c$, cette hyperbole est dans le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe mineur de l'ellipsoïde; de sorte que l'équation de cette focale est

$$(1)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2-b^2}-\frac{\gamma^2}{b^2-c^2}=1,$$

α, γ étant les coordonnées du sommet S de l'un des cônes circonscrits. L'ellipse de contact se projette sur le plan des XZ en une droite qui a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=1;$$

les axes de cette ellipse sont représentés par la ligne AB, polaire du sommet S, dans le plan des XZ, et par la

perpendiculaire élevée sur cette ligne au point I, milieu de cette ligne AB. Appelant A et B ces deux demi-axes, on trouve, en considérant AB comme la corde de contact des tangentes issues du point (α, γ) à l'ellipse ombilicale,

$$A^2 = \frac{(a^4\gamma^2 + c^4\alpha^2)(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2 - a^2c^2)}{(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2)^2}.$$

Pour obtenir le petit axe B, je coupe l'ellipsoïde par un plan passant par son centre C et par le sommet S perpendiculairement au plan des ZX; l'ellipse que j'obtiens ainsi a pour demi-axes b et CR; R est l'intersection de la droite CS avec l'ellipse ombilicale; de sorte que l'axe B est l'ordonnée de cette ellipse qui correspond à l'abscisse CI; or on trouve

$$\overline{CR}^2 = \frac{a^2c^2(\alpha^2 + \gamma^2)}{a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2}, \quad \overline{CI}^2 = \frac{a^4c^4(\alpha^2 + \gamma^2)}{(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2)^2};$$

donc

$$B^2 = \frac{b^2(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2 - a^2c^2)}{a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2}.$$

On peut, au moyen de la relation (1), éliminer α ou γ dans les valeurs de A et B; on trouve ainsi

$$a^4\gamma^2 + c^4\alpha^2 = \gamma^2(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)\left(\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}\right) + c^4(a^2 - b^2),$$

$$a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2 = b^2\gamma^2\left(\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}\right) + c^2(a^2 - b^2),$$

$$a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2 - a^2c^2 = b^2\gamma^2\left(\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}\right) - b^2c^2;$$

on déduit de là, sans difficulté,

$$\frac{B^2}{\sqrt{A^2 - B^2}} = \frac{b^3}{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}.$$

La question 238, proposée par M. Michael Roberts, se

déduit immédiatement de là; ainsi, lorsque plusieurs ellipsoïdes sont inscrits dans un cône de révolution suivant la même courbe de contact, leurs demi-axes a, b, c sont liés entre eux par la relation précédente. Ce savant géomètre a été conduit à ce théorème, au moyen de considérations différentes (*); il a trouvé, en effet, qu'en représentant par φ l'angle sous lequel une ligne géodésique issue d'un ombilic coupe une ellipse de contact d'un cône de révolution circonscrit, et par y la distance de ce point d'intersection au plan des ombilics, le produit $y \tang \varphi$ est constant et égal aussi à

$$\frac{b^3}{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}},$$

Il est facile de passer de l'un des théorèmes à l'autre, en se rappelant que :

1°. Le rayon vecteur tiré d'un foyer d'une conique coupe la courbe sous un angle tel, que le produit de sa tangente trigonométrique et de la distance du point d'intersection à l'axe le plus grand de la courbe, est constant et égal au carré du petit axe divisé par l'excentricité; 2°. Si l'on joint un point quelconque de l'ellipse de contact avec un foyer de la section, avec le sommet du cône, et, enfin, à l'ombilic situé sur la branche de l'hyperbole focale à laquelle appartient le sommet du cône, on obtient trois lignes qui coupent l'ellipse sous le même angle.

Nota. Un cône de révolution étant circonscrit à un ellipsoïde, toute sphère inscrite dans le cône coupera l'ellipsoïde suivant une de ses sections circulaires; et si elle devient tangente, le point de contact sera un ombilic de la surface. On peut donc considérer l'hyperbole focale

(*) Journal de M. Liouville, tome XV, page 283.

d'un ellipsoïde comme étant le lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde et à une sphère de rayon variable, tangente en un ombilic.

Si la sphère coupait l'ellipsoïde suivant une même section circulaire, le lieu géométrique serait évidemment le même. Ces deux théorèmes fournissent la solution de la question proposée au concours de 1844 (*Nouvelles Annales*, tome III, page 489), et de celle de M. Chasles, démontrée dans le tome X, page 408, et dernièrement par M. Breton (de Champ).

La considération du cône de révolution prouve encore que si l'on considère un point M d'une ellipse fixe et toutes les ellipses possibles, tangentes à la première au point M par leur sommet, le lieu des intersections des tangentes communes sera une hyperbole biconfocale à la proposée.

Considérons aussi une ellipse et une hyperbole concentriques ayant leurs axes dans la même direction; menons une tangente à l'hyperbole, et par les points où cette ligne rencontre l'ellipse, deux tangentes à celle-ci, leur point d'intersection décrira une hyperbole biconfocale à l'ellipse, et les axes de celle-ci seront moyens proportionnels entre ceux des hyperboles (*).

THÉORÈME SUR LES POLYGONES CIRCONSCRITS A UNE CONIQUE.

1. *Lemme.* Les droites qui mesurent les distances des deux foyers d'une conique à un point pris dans le plan

(*) M. Angelo Genocchi a adressé une solution plus directe, en s'appuyant sur le théorème de Steiner.

de la conique, sont également inclinées sur des tangentes à la conique menées par ce point (Poncelet).

2. Théorème. *Un polygone d'un nombre pair de côtés étant circonscrit à une conique, le produit des distances d'un foyer aux sommets de rang impair, divisé par le produit des distances du même foyer aux sommets de rang pair, donne le même quotient pour l'un et l'autre foyer.*

Démonstration. Pour fixer les idées, prenons un hexagone circonscrit à une conique dont nous désignons les foyers par F et F'. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les distances du point F aux sommets consécutifs 1, 2,..., 6; $b_1, b_2, \ldots, b_6$ les mêmes distances pour le foyer F'; $p_1, p_2, \ldots, p_6$ sont les distances perpendiculaires du foyer F aux tangentes 12, 23,..., 61; $q_1, q_2, \ldots, q_6$ les mêmes distances pour le foyer F'.

On a (*lemme* 1)

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{p_6}{q_1},\quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{p_2}{q_3},\quad \frac{a_5}{b_5}=\frac{p_4}{q_5},$$

d'où l'on tire

$$\frac{a_1 a_3 a_5}{b_1 b_3 b_5}=\frac{p_2 p_4 p_6}{q_1 q_3 q_5}.$$

On trouve le même résultat pour $\frac{a_2 a_4 a_6}{b_2 b_4 b_6}$. c. q. f. d.

Observation. M. Chasles a, le premier, fait connaître cette proposition pour le quadrilatère circonscrit, et l'a déduite des propriétés du cône à base circulaire. (*Journal de Mathématiques*, tome III, page 108; 1838.)

3. Dans la parabole, le second foyer étant à l'infini, le quotient qui s'y rapporte est égal à l'unité; on a donc cette proposition :

Un polygone d'un nombre pair de côtés étant circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer

aux sommets de rang impair est égal au produit des distances du foyer aux sommets de rang pair.

4. Il est évident que le théorème 2 subsiste pour les coniques sphériques. Il suffit de substituer aux distances les sinus des distances sphériques.

5. Lorsque le nombre des côtés du polygone est impair, on peut considérer une tangente comme brisée au point de contact et y formant un angle infiniment obtus; alors le nombre des sommets devient pair, et le théorème 2 subsiste encore. Par exemple, soient le triangle ABC circonscrit, I le point de contact du côté AB, F et F′ les deux foyers; I étant pris comme un sommet, on a le quadrilatère AIBC; et appliquant le théorème, on obtient

$$\frac{\mathrm{FI.FC}}{\mathrm{FA.FB}} = \frac{\mathrm{F'I.F'C}}{\mathrm{F'A.F'B}},$$

et, dans la parabole,

$$\mathrm{FI.FC} = \mathrm{FA.FB}.$$

On déduit de là facilement le théorème suivant:

Dans tout polygone circonscrit d'un nombre impair de côtés, le produit des distances d'un foyer aux sommets, divisé par le produit des distances du même foyer aux points de contact, donne le même quotient par chaque foyer.

COURBES PLANES; GÉNÉRATION.

1. *Lemme.* Une courbe plane du degré n est, généralement parlant, déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ points.

2. Théorème. *a_p désignant un point fixe dans un plan; A_p une droite fixe dans le même plan; O un point mobile; I_p l'intersection de la droite A_p avec la droite*

menée de O au point a_p; donnons à l'indice p successivement les valeurs de la suite 1, 2, 3, ..., $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$; *nous aurons* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *points fixes; autant de droites fixes, autant de points d'intersection* I_p. *Si ces derniers points sont assujettis à se trouver sur une ligne de degré n, le point mobile* O *décrit une ligne de degré*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Démonstration. Soient $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ les coordonnées du point O; $\frac{x_p}{z_p}$, $\frac{y_p}{z_p}$ les coordonnées du point a_p, et

$$A_p x + B_p y + C_p z = 0$$

l'équation de la droite A_p. L'équation de la droite qui joint le point O au point a_p est

$$x[y_1 z_p] + y[x_1 y_p] + z[y_1 x_p] = 0;$$

le crochet indique un déterminant binaire. Les trois coordonnées des points d'intersection I_p sont donc des fonctions linéaires de x_1, y_1, z_1.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

une équation générale homogène de degré n et renfermant $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients indéterminés. Substituant, dans cette équation, à la place de x, y, z, les coordonnées correspondantes des points I_p, on obtient $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations du premier degré entre les

$\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients, et, dans chaque terme, les x_1, y_1, z_1 montent au degré n; on a donc une équation de plus que d'inconnues; éliminant les coefficients en égalant le déterminant à zéro, on obtient une équation en x_1, y_1, z_1 de degré $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

3. On établit de la même manière le théorème suivant :

Étant donnés $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$ *points dans l'espace et autant de plans, un faisceau de droites qui passe par ces points fixes, et par le point mobile* O, *coupe les plans en* $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ *points; si ces points d'intersection sont assujettis à être sur une surface de degré* n, *le point mobile* O *décrit une surface de degré* $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$.

SOLUTION DE LA QUESTION 268

(voir t. XI, p. 402);

PAR M. JOSEPH SACCHI, DE PAVIE.

On prend pour plan des xy celui de la section circulaire passant par le point fixe, ce point pour origine, l'axe des x passant par le centre du cercle. Soient a, b, c les coordonnées du sommet du cône, d la distance de l'origine au centre du cercle ayant r pour rayon. L'équation de la surface conique sera

$$c^2(x^2+y^2)+m^2z^2-2cz(nx+by-p^2)-2c^2dx-c^2q^2=0,$$

où

$$m^2 = (a-d)^2 + b^2 - r^2, \quad n = a - d,$$
$$q^2 = r^2 - d^2, \qquad p^2 = q^2 + ad;$$

et si, dans cette équation, au lieu de x, y, z on met respectivement les valeurs suivantes :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha\cos\beta, \quad x\sin\alpha - y\cos\alpha\cos\beta, \quad y\sin\beta,$$

on aura

$$\mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}y + \mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0,$$

où

$$\mathrm{A} = c^2 + (m^2 - c^2)\sin^2\beta - 2c\sin\beta\cos\beta\,(n\sin\alpha - b\cos\alpha),$$
$$\mathrm{B} = -2c\sin\beta\,(n\cos\alpha + b\sin\alpha),$$
$$\mathrm{C} = c^2,$$
$$\mathrm{D} = 2c\,(p^2\sin\beta - cd\sin\alpha\cos\beta),$$
$$\mathrm{E} = -2c^2 d\cos\alpha,$$
$$\mathrm{F} = -c^2q^2.$$

Cette nouvelle équation représente la section du cône avec le plan passant par l'origine et formant avec le plan des xy l'angle β.

La condition que le point fixe, c'est-à-dire l'origine, soit un foyer de la courbe, est exprimée par

$$\mathrm{E}^2 - 4\,\mathrm{CF} = \mathrm{D}^2 - 4\,\mathrm{AF}, \quad \mathrm{DE} - 2\,\mathrm{BF} = 0,$$

ou

$$\operatorname{tang}^2\beta\,(f^2 + d^2\cos^2\alpha) + 2\operatorname{tang}\beta\left(h^2\sin\alpha - q\frac{2b}{c}\cos\alpha\right)$$
$$+ d^2\cos 2\alpha = 0,$$
$$\operatorname{tang}\beta\left(h^2\cos\alpha + q\frac{2b}{c}\sin\alpha\right) - d^2\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

ou encore

$$f^2 = \frac{q^2(c^2 - b^2) - r^2a^2}{c^2}, \qquad h^2 = \frac{a}{c}r^2.$$

Ces dernières équations fournissent les valeurs de α et β qui déterminent la position du plan sécant.

Si le cône est droit, on a

$$b = 0, \quad a = d, \quad h^2 = \frac{d}{c} r^2, \quad f^2 = \frac{q^2 l^2 - r^4}{c^2},$$

où $l = \sqrt{c^2 + p^2}$ est le côté du cône; la seconde équation donne

$$\cos\alpha = 0,$$

et, par conséquent, la première

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{d}{k},$$

où $k = \frac{ql + r^2}{c}$; le plan sécant devient perpendiculaire au plan xz, et $kz - dx = 0$ est son équation, qui, évidemment, représente le plan tangent à la sphère,

$$(x - d)^2 + y^2 + (z + k)^2 = k^2 + d^2.$$

Si le point fixe devait être le centre de la section, les conditions seraient

$$\mathrm{D} = 0, \quad \mathrm{E} = 0,$$

ou bien

$$\cos\alpha = 0, \quad p^2 \sin\beta - cd \sin\alpha \cos\beta = 0;$$

on conclut de ces équations

$$\alpha = 90°, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{cd}{p^2},$$

et $p^2 z - cdx = 0$ pour l'équation du plan sécant.

Note. Faisant $c = \infty$, le cône devient un cylindre, et l'on trouve

$$\alpha = 90°, \qquad \operatorname{tang}^2\beta = \frac{d^2}{r^2 - d^2}.$$

NOTE SUR LES FOYERS

(voir t. II, p. 429) ;

PAR MM. JOSEPH SACCHI, DE PAVIE, ET LAGUERRE-VERLY.

Si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point à une conique rapportée à des axes se coupant sous l'angle γ, est égal à $\cos\gamma \pm \sin\gamma . \sqrt{-1}$, ce point est un foyer.

Cette propriété analytique des foyers, généralisation de celle qui a été indiquée par Plucker, offre un moyen très-simple pour déterminer les coordonnées des foyers dans le cas le plus général.

Soient α et β les coordonnées d'un foyer de la conique rapportée à deux axes formant l'angle γ, et posons

$$m = B^2 - 4AC, \qquad l = D^2 - 4AF,$$
$$l' = E^2 - 4CF, \qquad k = 2AE - BD,$$
$$k' = 2CD - BE, \qquad n = DE - 2BF,$$
$$P = m\beta^2 - 2k'\beta + l', \qquad Q = m\alpha^2 - 2k\alpha + l,$$
$$R = m\alpha\beta - k'\alpha - k\beta - n;$$

l'équation de la tangente à la conique, en nommant p le coefficient angulaire, est

$$my = mpx - pk + k' \pm \sqrt{p^2(k^2 - ml) - 2p(kk' + mn) + k'^2 - ml'},$$

qui doit être satisfaite par

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad p = \cos\gamma \pm \sin\gamma\sqrt{-1};$$

mettant ces valeurs de x, y, et résolvant l'équation par

rapport à p, on a

$$p = \frac{R}{Q} \pm \sqrt{\frac{PQ - R^2}{Q^2}} \sqrt{-1},$$

donc

$$\cos\gamma = \frac{R}{Q}, \qquad \sin\gamma = \frac{\sqrt{(PQ - R^2)}}{Q};$$

ainsi

$$Q\cos\gamma - R = 0, \quad Q - P = 0,$$

équations qui déterminent les valeurs de α, β, coordonnées des foyers.

Prenant pour axes les diamètres conjugués égaux, l'équation $Q - P = 0$ représente le système des deux axes principaux.

Note. Soit $y + ex = 0$ l'équation d'une tangente passant par l'origine; on a

$$l' - 2en + le^2 = 0 \qquad \text{(t. II, p. 108)}.$$

Si l'origine est un foyer,

$$l = l', \qquad n = l\cos\gamma;$$

d'où l'on tire

$$e = \cos\gamma \pm i \sin\gamma.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, EN 1852.

Épreuve graphique. — Questions proposées.

1. Un plan passant par la ligne de terre est donné; on mène un second plan qui divise en deux parties égales l'angle formé par le premier avec le plan horizontal, et, dans le second plan, on trace un cercle que l'on prend pour base d'un cylindre droit.

On demande les intersections de ce cylindre avec les deux plans de projection, ainsi que la tangente en un point quelconque de chaque intersection.

2. Dans le plan vertical, tracez un cercle dont le centre soit sur la ligne de terre; dans ce cercle, tracez un diamètre vertical, puis engendrez une sphère en faisant tourner ce cercle autour du diamètre.

Par l'extrémité inférieure du diamètre, inscrivez dans le cercle une corde égale au rayon; puis, par cette corde, concevez un plan perpendiculaire au plan vertical : l'intersection de ce plan avec la sphère sera un petit cercle que vous prendrez pour base d'un cône qui aura son sommet à l'extrémité supérieure du diamètre.

On propose de construire l'intersection de ce cône avec le plan horizontal, ainsi que la tangente en un point quelconque de cette intersection.

3. Trois droites indéfinies sont données, savoir : une droite α située dans le plan horizontal et perpendiculaire à la ligne de terre LL'; une deuxième droite β située dans le plan vertical et perpendiculaire aussi à LL'; enfin, une troisième droite γ parallèle à LL', mais qui n'est ni dans le plan horizontal, ni dans le plan vertical.

Imaginons qu'une surface soit engendrée par une droite mobile μ, qui glisse sur ces droites fixes.

On coupe cette surface par un plan vertical V, et l'on veut connaître l'intersection en vraie grandeur, dans un rabattement qui devra être fait sur le plan vertical.

4. Un cylindre est donné : il est droit, sa base est un cercle, et il est tangent aux deux plans de projection. Sur le plan horizontal un cercle est donné, lequel est tangent à la ligne de terre et égal à la base du cylindre.

Prenez un point quelconque dans le plan vertical, et supposez que ce point soit le sommet d'un cône engendré par une droite qui s'appuie sur le cercle : on demande l'intersection de ce cône avec le cylindre, et la tangente en un point quelconque de cette intersection.

Ces quatre questions sont celles qui ont été proposées aux candidats de Paris.

5. Construisez un cylindre droit à base circulaire, ayant pour axe la ligne de terre elle-même; sur l'arête placée en avant du plan vertical, au-dessus du plan horizontal, et à égale distance de ces deux plans, prenez un point quelconqne, puis, de ce point comme pôle, avec une ouverture de compas égale au demi-côté du carré inscrit dans la base du cylindre, concevez qu'une courbe ait été décrite sur ce cylindre.

Il s'agit de construire les projections de cette courbe et celles de la tangente en un point quelconque de la courbe.

6. *Données*. Un cylindre droit, vertical, d'un rayon de 2 centimètres, et dont l'axe est distant de 10 centimètres du plan vertical; deux droites D et d, inclinées sur chacun des plans de projection, et situées d'un même côté par rapport au cylindre. (Dans un autre programme, elles étaient situées de deux côtés différents.)

Il s'agit : 1° de construire le lieu de toutes les droites assujetties à toucher le cylindre et à s'appuyer à la fois sur les deux droites D et d; 2° de tracer la courbe, lieu des points où ces droites rencontrent le plan vertical. (Dans un troisième programme, cette seconde condition était remplacée par celle-ci : Limiter la surface à sa trace sur un cylindre ayant même axe que le cylindre donné, et pour base un cercle de 8 centimètres de rayon.)

Dans ces trois programmes, le nombre des positions de la droite mobile était réduit à dix, et l'on devait tenir compte, dans chaque projection, des parties cachées, soit par la surface elle-même, soit par les plans de projection, soit par le cylindre.

7. *Données*. Un cylindre droit, vertical, d'un rayon de 2 centimètres, et dont l'axe est distant de 10 centimè-

tres du plan vertical; une droite D, distante de 10 centimètres de l'axe du cylindre, inclinée de 45 degrés sur le plan horizontal, et rencontrant les plans de projection au-dessus et en deçà de la ligne de terre. (Dans un autre programme, le cylindre était perpendiculaire au plan vertical.)

Il s'agit : 1° de construire le lieu de toutes les droites assujetties à toucher le cylindre et à s'appuyer sur la droite D, en restant parallèles au plan horizontal; 2° de tracer la courbe lieu des points où ces droites rencontrent le plan vertical. (Dans un autre programme, on devait limiter la surface à un cylindre ayant même axe que le cylindre donné, et pour base un cercle de 8 centimètres de rayon.)

Il était prescrit de réduire à dix le nombre des génératrices, et de tenir compte des parties cachées.

8. *Données.* Un cône de révolution dont l'axe est vertical, dont le rayon de la base est de 8 centimètres, et dont la hauteur est de 16 centimètres; un cylindre ayant pour courbe directrice un cercle c d'un rayon de 3 centimètres, situé sur le plan de la base du cône, et dont le centre b est à 4 centimètres du centre a de cette base, et ayant pour axe une droite inclinée de 30 degrés sur le plan horizontal, et dont la projection horizontale n'est point parallèle à la droite des centres a et b.

Il s'agit de construire les projections de la courbe d'intersection du cône et du cylindre.

Dans un autre programme, le cylindre était remplacé par un cône ainsi déterminé : Sur la base du premier cône, un cercle c dont le centre b est à 4 centimètres du centre a de la base du cône, et dont le rayon est de 3 centimètres; un point S situé dans l'intérieur du cône de révolution, et ayant sa projection verticale en avant de la droite ab.

Et il s'agissait de construire l'intersection du cône de révolution par la nappe supérieure du cône ayant la circonférence de cercle *c* pour directrice et le point S pour sommet. (Recommandation relative aux parties cachées.)

9. *Données.* Deux cônes droits à base circulaire, dont les axes se rencontrent; l'axe de l'un est perpendiculaire au plan horizontal, et l'axe de l'autre est perpendiculaire au plan vertical.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection des deux surfaces; 2° de tracer le développement du premier cône; 3° de construire la tangente en un point de la transformée.

10. *Données.* Un cône droit à base circulaire, dont l'axe est vertical; une sphère qui passe par le sommet de ce cône, et dont le centre est placé sur une génératrice.

Il s'agit : 1° de construire la courbe d'intersection des deux surfaces; 2° la tangente en un point de la courbe; 3° la transformée de cette courbe après le développement.

Nota. On prendra la génératrice du cône égale à trois fois le rayon de la base; on prendra ce même rayon pour celui de la sphère, et l'on placera le centre de la sphère sur la génératrice située le plus en avant par rapport au plan vertical.

On avait compris les épreuves des années précédentes, et l'on s'y était préparé.

Les questions, sans difficultés réelles au point de vue géométrique, à peu près de même difficulté au point de vue de leur mise en projection et de l'interprétation graphique du résultat, donnaient lieu à une quantité de travail suffisante pour montrer ce que chaque élève savait en ce genre.

L'année dernière, une sorte de confusion s'est manifestée : d'un côté, des intersections de surfaces dont les

programmes étaient rédigés de la manière en quelque sorte reconnue ; de l'autre, des lieux géométriques qui, tout convenables qu'ils pouvaient être, étaient proposés en des termes qui ont dû causer de l'embarras aux élèves ; puis, des questions d'un ordre tout à fait inférieur, telles que la construction des traces d'un cylindre ou d'un cône, et des tangentes à ces traces elliptiques, et la section circulaire d'un cône oblique.

En présence de telles questions, un élève était évidemment dans l'impuissance de montrer qu'il savait représenter l'étendue figurée et lire dans l'espace, et même dessiner. Ajoutons : comment a-t-on pu juger et comparer les résultats d'épreuves subies dans des conditions si différentes ?

Nous avons vu des candidats de Paris qui, pour employer leurs quatre heures, se sont jetés dans la discussion des sections coniques ou dans des calculs analytiques ; d'autres qui, à propos de la seconde question, ont construit par points la courbe de section, c'est-à-dire, comme s'il ne leur était pas démontré que cette courbe fût une circonférence de cercle ; tandis que d'autres, ne croyant pas à un tel abaissement de l'épreuve, se sont évertués à y découvrir autre chose que ce qui y était ; quelques-uns, enfin, en faisant exister la sphère et en construisant les deux projections du cône, ont réussi à donner plus d'importance à leur travail.

Quant aux lieux géométriques, qui sont une source de bons exercices graphiques, il nous semble qu'on aurait dû ne pas limiter le nombre des positions de la droite mobile sur les directrices, et laisser, au contraire, les élèves libres d'étendre convenablement leur surface, mais en les avertissant qu'ils ne devaient tenir compte que d'une des nappes de cette surface. Il est nécessaire de construire des génératrices en assez grand nombre et

assez rapprochées pour qu'il y ait une continuité suffisante dans les traces et dans les contours, traces et contours sans lesquels un lieu géométrique à trois dimensions n'existe pas, ou plutôt est illisible, en ce qu'il ne présente qu'un entassement de lignes où l'œil et la réflexion ne parviennent pas à distinguer les parties vues et les parties cachées.

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE D'EULER, SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE;

Par M. LEBESGUE.

1. Posons

$$[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots]^m$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots;$$

on reconnaît de suite que pour m entier positif, A_i est toujours entier, et comme

$$(1-x^n)^{-1} = 1 + x^n + x^{2n} + \ldots,$$

il en sera de même pour le cas de m entier négatif.

2. Prenons les logarithmes des deux membres, puis les dérivées, ensuite multiplions par x, divisons par m et changeons les signes; il viendra

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} \ldots + \frac{nx^n}{1-x^n} \ldots$$
$$= \frac{-\frac{1}{m}(A_1 x + 2A_2 x^2 + 3A_3 x^3 \ldots)}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots}.$$

3. A cause de

$$\frac{nx^n}{1-x^n} = nx^n + nx^{2n} + nx^{3n} + \ldots,$$

en réduisant le premier membre de l'équation de l'article 2 à la forme entière, on a

$$x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 \ldots = \frac{-\frac{1}{m}(A_1 x + 2A_2 x^2 \ldots)}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots},$$

en représentant par $\int n$ la somme des diviseurs du nombre entier n.

4. Chassant le dénominateur et passant tous les termes dans le premier membre, on trouve

$$x\left(A_0\int 1 + \frac{A_1}{m}\right) + x^2\left(A_0\int 2 + A_1\int 1 + \frac{2A_2}{m}\right)$$
$$+ x^3\left(A_0\int 3 + A_1\int 2 + A_2\int 1 + \frac{3A_3}{m}\right)$$
$$+ \ldots + x^n\left[A_0\int n + A_1\int(n-1) + \ldots + A_{n-1}\int 1 + \frac{nA^n}{m}\right]$$
$$+ \ldots = 0.$$

Il faut donc poser généralement

$$A_0\int n + A_1\int(n-1) + A_2\int(n-2).$$
$$+ \ldots + A_{n-1}\int 1 + \frac{nA_n}{m} = 0;$$

posant $m = 1$, on a la formule d'Euler, et il l'obtient précisément de même.

5. Euler a trouvé, par induction, les coefficients du développement de

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots,$$

par une règle qui revient à ceci :

1°. Le coefficient est nul quand l'exposant n'est pas de la forme

$$\frac{3n^2 \pm n}{2},$$

et chaque terme est de la forme $(-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$;

2°. Il faut prendre successivement les deux signes; on

n'a jamais

$$\frac{3n^2 - n}{2} = \frac{3\nu^2 + \nu}{2},$$

d'où résulterait

$$3(n - \nu) = 1;$$

ce qui est impossible, n et ν étant entiers.

Ce qui rend sa formule d'une application facile, c'est que les coefficients ont pour valeurs 0, 1, — 1.

6. Comme

$$\int 1 = 1, \quad \int 2 = 3, \quad \int 3 = 4, \quad \int 4 = 7, \quad \int 5 = 6, \text{ etc.},$$

on trouve sans difficulté, au moyen des équations suivantes ($A_0 = 1$) :

$$\frac{A_1}{m} + \int 1 = 0,$$

$$\frac{2A_1}{m} + A_1 \int 1 + \int 2 = 0,$$

$$\frac{3A_3}{m} + A_2 \int 1 + A_1 \int 2 + \int 3 = 0,$$

$$\frac{4A_4}{m} + A_3 \int 1 + A_2 \int 2 + A_1 \int 3 + \int_4 = 0,$$

$$\frac{5A_5}{m} + A_4 \int 1 + A_3 \int 2 + A_2 \int 3 + A_1 \int_4 + \int_5 = 0,$$

etc.

$$A_1 = -\frac{m}{1}, \quad A_2 = \frac{m.m-3}{1.2}, \quad A_3 = \frac{-m(m-1)(m-8)}{1.2.3};$$

$$A_4 = \frac{m(m-1)(m-3)(m-14)}{1.2.3.4};$$

$$A_5 = \frac{-(m-3)(m-6)(m^2-21m+8)}{1.2.3.4.5};$$

etc.

Il serait curieux de trouver la loi ; il est probable que la recherche est épineuse.

7. Il est à croire que différentes formules des *Fundamenta* de Jacobi conduisent à des relations analogues entre les quantités $\int 1$, $\int 2$, $\int 3$, ... (*Voyez* tome IX, pages 73 et 410.)

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'EULER

(voir t. XI, p. 327);

PAR M. ANGELO GENOCCHI,
Avocat.

Tout nombre entier qui n'est pas compris dans la formule $4mn - m - n$ est nécessairement compris dans la formule $x^2 + y^2 + y$.

On suppose que m, n, x, y sont aussi des nombres entiers.

Démonstration. Soit N un entier non compris dans la première formule : je dis que le nombre $4N + 1$ n'aura aucun diviseur de la forme $4m - 1$; car s'il en avait, le quotient serait de la même forme, et, en le représentant par $4n - 1$, il viendrait

$$4N + 1 = (4m - 1)(4n - 1),$$

d'où

$$N = 4mn - m - n,$$

contre l'hypothèse. Il s'ensuit que le nombre $4N + 1$ sera décomposable en deux carrés, l'un pair et l'autre impair, et qu'ainsi on pourra satisfaire à l'équation

$$4N + 1 = (2x)^2 + (2y + 1)^2,$$

qui donne

$$N = x^2 + y^2 + y.$$

Réciproquement, si un nombre entier N n'est pas compris dans la formule $x^2 + y^2 + y$, le nombre $4N + 1$ ne

sera pas décomposable en deux carrés, et, par suite, aura quelque diviseur de la forme $4m - 1$; le quotient pourra être exprimé par $4n - 1$, et l'on aura

$$4N + 1 = (4m - 1)(4n - 1),$$

d'où

$$N = 4mn - m - n,$$

c'est-à-dire que N sera nécessairement compris dans la formule $4mn - m - n$.

Observation. Relativement aux entiers décomposables en deux carrés, j'ajouterai aux remarques faites dans le tome XI, page 47, que la formule, dite de M. Gauss, sur le nombre des décompositions, remonte effectivement à Fermat, car elle n'est que la traduction algébrique d'une règle donnée par ce grand géomètre dans ses Notes sur Diophante (*Arithm.*, lib. III, quæst. 22, *Observ.* Fermat *ad Comm*). Elle découle aussi des développements en séries infinies, que Jacobi a introduits dans la théorie des fonctions elliptiques. La démonstration algébrique de cette formule, qui était demandée dans le tome IX, page 307, de ce Journal, et sur laquelle une question de priorité s'est élevée entre MM. Prouhet et Volpicelli, n'est pas difficile à trouver : j'en avais adressé une à M. Terquem, en novembre 1850, qui était fondée sur la théorie des nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$ (*). Celle qu'a donnée M. Chelini dans les *Annali* de M. Tortolini, 1852, page 126, aurait besoin, ce me semble, de quelques éclaircissements, car il ne paraît pas établi d'une manière assez concluante, que les solutions obtenues sont toutes différentes, et surtout qu'il n'y en a pas d'autres.

(*) M. Laguerre-Verly nous a remis une démonstration fondée aussi sur les nombres complexes. Nous la joignons à celle de M. Genocchi.

SOLUTION DE LA QUESTION 264;

Par MM. FAURE, THIOLIER et DE SÉCILLON (élève au lycée de Bordeaux).

Une sphère a un mouvement de rotation uniforme autour d'un de ses diamètres, et un mouvement uniforme de révolution autour d'un axe situé hors de la sphère et parallèle au diamètre axe de rotation; les deux vitesses angulaires sont égales et de sens opposé; chaque diamètre de la sphère décrit un cylindre.

Par le centre C de la sphère je mène un plan perpendiculaire à l'axe, et j'appelle O le point où ce plan rencontre l'axe. Je prends ce plan pour celui de la figure, de telle sorte que CA soit la trace du plan d'un grand cercle qui passerait par l'axe de rotation. Je veux faire voir que le plan de ce grand cercle reste toujours parallèle à lui-même dans le mouvement de la sphère. Soit, en effet, F la position du centre C, au bout d'un certain temps, en vertu du mouvement de révolution; le grand cercle aura pris une position FD telle, que l'angle DFE = ABC. D'un autre côté, à cause du mouvement de rotation, cette même ligne FD prendra une position FI telle, que l'angle DFI = COF, puisque, par hypothèse, les deux vitesses angulaires sont égales, mais de sens opposé. Reste donc à montrer maintenant que l'angle EFI = EHA, afin de faire voir que les lignes FD, AC sont parallèles. Or on a évidemment

$$\text{EFI} = \text{EFD} + \text{DFI} = \text{BCA} + \text{HOC} = \text{EHA}.$$

Il résulte de là qu'un grand cercle de la sphère paral-

lèle à l'axe reste toujours parallèle à lui-même ; un diamètre situé dans ce plan, c'est-à-dire un diamètre quelconque de la sphère, aura la même propriété et décrira par suite un cylindre.

CONSIDÉRATIONS SUR LES COURBES SPHÉRIQUES ;

D'APRÈS M. MÖBIUS (*).

M. Möbius classe les diverses courbes algébriques planes, d'après leurs projections centrales sur une sphère donnée. A cet effet, il établit les théorèmes suivants sur ces projections, qu'il nomme *courbes sphériques, de même degré que la courbe plane projetée*. On suppose, d'ailleurs, que le centre de la sphère n'est pas sur la courbe plane. Nous supprimons les démonstrations lorsqu'elles sont faciles à trouver.

1. THÉORÈME. *Une courbe sphérique de degré* n *est coupée par un grand cercle en* $2n$, *ou en* $2n-4$, *ou en* $2n-6$, *etc., points.*

Ainsi, à un point singulier de la courbe plane correspond un couple de points singuliers dans la courbe sphérique. La courbe plane étant algébrique, n'a pas de points d'arrêt ; donc la courbe sphérique ne peut non plus s'arrêter brusquement, et ne peut avoir que des branches fermées ; car une branche non fermée serait rencontrée par un grand cercle en une infinité de points,

(*) *Uber die grandformen der linien der Dritten ordnung* : Sur les formes fondamentales des lignes du troisième ordre. Leipzig, 1849 ; in-4°, p. 82 ; 1 pl.

et la courbe plane étant algébrique serait pourtant coupée par une droite en une infinité de points; ce qui est impossible.

2. A chaque branche sphérique correspond, généralement, une branche symétrique égale et non superposable. Les deux branches sont dites *géminées;* toutefois, les deux branches peuvent se confondre et n'en faire qu'une seule; alors c'est une branche *simple.* On en a un exemple dans la projection sphérique d'une droite.

Branches simples.

3. Théorème. *Un grand cercle coupe une branche simple en un nombre de points impairement pairs.*

Démonstration. Soit A un point de la branche non situé sur le grand cercle; le point A′ symétrique est nécessairement de l'autre côté du plan du grand cercle, et pour aller de A en A′, il faut nécessairement passer un nombre impair de fois par le grand cercle; donc, etc.

4. Théorème. *Une branche simple a toujours un nombre impair de couples de points d'inflexion.*

Démonstration. Supposons qu'un grand cercle touche la courbe en un point A qui ne soit pas un point singulier, il la touchera également en un point A′ diamétralement opposé. Soient B, C deux points consécutifs, à droite et à gauche de A, et supposons que AB, AC présentent ou tournent leur convexité vers le cercle tangent; il en sera de même des arcs A′B′, A′C′ par rapport à A′; donc l'arc B′A′C′ tournera sa concavité vers A; en marchant donc sur la courbe de A en A′, on rencontrera un point dans lequel la courbe ne sera ni concave ni convexe vers A et A′, c'est-à-dire un point d'inflexion et au moins un; il est évident qu'il peut y en avoir davantage, mais toujours en nombre impair.

5. Théorème. *On ne peut aller sur une branche*

simple, d'un point au point diamétralement opposé, sans rencontrer au moins un point singulier (nœud, de rebroussement ou d'inflexion).

Démonstration. Soient A et A′ deux points quelconques diamétralement opposés ; B étant un point voisin à A, concevons le grand cercle ABA′, et supposons que l'arc de cercle AB tourne sa concavité vers l'arc de courbe AB ; de même l'arc de courbe A′B′ tournera sa concavité vers l'arc de cercle A′B′, et par conséquent il tournera sa *convexité* vers A. Il faut donc, par le même raisonnement que ci-dessus, qu'en allant de A vers A′, il y ait un point singulier.

6. Théorème. *Une branche simple qui n'a ni nœuds, ni rebroussement, a nécessairement au moins trois couples de points d'inflexion.*

Démonstration. Entre deux points d'inflexion diamétralement opposés, on doit rencontrer un point singulier (*théorème* 5) ; n'étant ni un nœud, ni un rebroussement, ce point est donc d'inflexion.

Observation. Lorsque la courbe présente un nœud, ou un couple de rebroussement, il ne peut exister qu'un seul couple d'inflexion ; le nœud et le rebroussement résulte alors de points d'inflexion qui se sont réunis. On peut obtenir une telle courbe si l'on divise un grand cercle en quatre quadrants A, B, A′, B′, et qu'on décrive sur AB, BA′ deux demi-cercles intérieurement au grand cercle, et sur A′B′, B′A deux autres demi-cercles extérieurement : les quatre demi-cercles forment une courbe simple qui a deux points d'inflexion en A et A′, et deux rebroussements en B et B′.

Courbes géminées.

7. Un grand cercle coupe un système de deux courbes géminées en un nombre pair de points, zéro non exclu.

8. Un système de deux courbes géminées a un nombre pair de couples d'inflexions, zéro non exclu.

Observation. Il faut se rappeler que les courbes sont fermées, et que chaque point de l'une des courbes a son opposé sur l'autre courbe.

9. Théorème. *Un système de courbes géminées est coupé par un grand cercle en un nombre pair de couples de points.*

10. Une ligne sphérique de degré impair a nécessairement un nombre impair de *courbes simples* et un nombre impair de points d'inflexion.

Une ligne sphérique d'ordre pair a un nombre *pair* de courbes simples et un nombre pair de points d'inflexion, zéro non exclu.

C'est une conséquence des nos 3 et 9.

11. Soit un système géminé, projection d'une ligne plane; désignons par γ une de ces courbes sphériques; menons par le centre de la sphère un plan parallèle à celui de la courbe plane, et coupant la sphère suivant un grand cercle ν; si ν ne rencontre pas γ, la courbe plane est fermée; si ν rencontre γ en un point, la courbe c a deux branches infinies de même direction. Si ν coupe γ en plusieurs points, la courbe c a autant de paires de branches infinies et de directions opposées, le nombre de ces couples de branches est nécessairement pair. Mais si γ est une courbe simple, k et k' étant deux points opposés, divisent la courbe en deux parties, chacune projection de la même courbe plane, et chaque moitié n'est rencontrée par ν qu'en un nombre impair de points; donc la courbe plane a un nombre impair de couples de branches infinies et de directions opposées.

12. Réciproquement, si le nombre de couples de branches infinies de directions opposées de la courbe plane est impair, la courbe sphérique sera simple, et si ce nombre

est pair, la courbe sphérique est géminée. D'après cela, on voit que la courbe sphérique correspondante à une conique est toujours géminée.

13. Si l'on nomme *courbe plane de la première espèce*, celle dont la projection sphérique est simple, et de la *seconde espèce*, celle dont la projection sphérique est géminée, on obtient les propositions suivantes :

1° Une courbe de première espèce est rencontrée par une droite en un nombre impair de points, et, par conséquent, elle a un nombre impair de couples de branches infinies de directions opposées; 2° une courbe de deuxième espèce est rencontrée par une droite en un nombre pair de points, et a un nombre *pair* de branches infinies de directions opposées.

Courbes du troisième degré.

14. Une courbe sphérique du troisième degré, que nous désignerons toujours par la lettre λ, n'est rencontrée par un grand cercle qu'en trois couples ou en un couple de points.

Il s'ensuit qu'une telle courbe ne peut avoir qu'une seule courbe simple, que nous désignerons par ε; car par deux couples de points de la courbe ε, faisant passer un grand cercle, il la coupera encore en deux autres points, et il faut qu'il coupe au moins une fois une autre courbe ε, ce qui est impossible.

Si la courbe ε n'a ni nœuds ni rebroussements, elle aura *trois points* d'inflexion situés sur un même grand cercle et pas davantage. La démonstration géométrique est très-compliquée; nous la supprimons. On sait, d'ailleurs, que la courbe plane ne peut avoir que trois points d'inflexion réels. Outre la courbe ε, la courbe λ peut encore avoir *une* seule courbe géminée, mais pas davantage; et les deux courbes du système géminé doivent

être situées du côté opposé de la courbe ε; ce qui est évident. Lorsque la courbe ε a trois points d'inflexion, il peut exister encore une courbe géminée; mais, lorsqu'elle n'a qu'un point d'inflexion ou un rebroussement, la courbe géminée est impossible. Du reste, les deux courbes peuvent se réduire à des points isolés; ce qui donne cinq cas :

1°. Une courbe simple avec trois couples de points d'inflexion et une courbe géminée;

2°. Une courbe simple avec trois couples de points d'inflexion et un couple de points isolés;

3°. Une courbe simple avec trois points d'inflexion, sans courbe géminée;

4°. Une courbe simple avec un couple de points d'inflexion et un couple de nœuds;

5°. Une courbe simple avec un couple de points d'inflexion et un couple de points de rebroussement.

NOTE

Sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique ou transcendante;

Par M. Ossian BONNET.

J'ai publié dans ce Recueil (tome IV, 1845) un essai sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante; ce travail, dont la fin n'a pas paru, contenait une solution complète du problème que je m'étais posé, mais je dois avouer que cette solution était très-compliquée. J'ai reconnu depuis, en revenant sur le même sujet, pour simplifier, d'après les conseils de M. Terquem, mes anciens résultats, qu'il était possible de traiter la question d'une manière bien

plus simple. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

Soit

$$(1)\qquad f(t)=0$$

l'équation proposée où $f(t)$ est une fonction continue quelconque, réelle ou imaginaire. Posons

$$t=x+y\sqrt{-1},$$

$$f(x+y\sqrt{-1})=f_1(x,y)+f_2(x,y)\sqrt{-1}=P+Q\sqrt{-1},$$

$f_1=P$ et $f_2=Q$ étant des fonctions réelles de x et de y; et, regardant x, y, z comme des coordonnées rectangulaires, considérons la surface représentée par l'équation

$$(2)\qquad z=P^2+Q^2.$$

Il est clair que les points où cette surface rencontrera le plan des (x, y) seront les points-racines de l'équation (1), c'est-à-dire les points ayant pour coordonnées x et y, les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ des racines de l'équation (1). On voit en même temps qu'en ces points, la surface représentée par l'équation (2) touchera le plan des (x,y), et, par conséquent, comme la surface est tout entière au-dessus du plan des (x, y), que, dans le voisinage de ces points, elle tournera sa convexité vers le plan des (x, y).

Cela posé, supposons que, par le théorème de M. Cauchy ou par tout autre moyen, on soit parvenu à tracer dans le plan des (x, y) un contour rectangulaire ABCDA ayant ses côtés parallèles aux axes des coordonnées et comprenant un et un seul point-racine m de l'équation (1); supposons, en outre, que, pour tous les points compris dans ce contour, la surface tourne sa convexité du côté du plan des (x, y). Si l'on prend sur la surface représentée

par l'équation (2) un point M_0 projeté en m_0 sur le contour ABCDA ou dans son intérieur, et que, par ce point, on mène un plan tangent, la trace RT de ce plan sur le plan des (x, y) laissera de côtés différents les points m_0 et m; par conséquent, en abaissant du point m_0 une perpendiculaire sur TR, et prolongeant cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité m_1 ainsi obtenue sera plus voisine de m que m_0. Or il est facile de voir que le point m_1 correspond au nombre imaginaire que l'on obtient pour seconde valeur approchée de la racine dont le point m est la représentation géométrique, lorsqu'on applique la méthode de Newton à la valeur approchée qui répond au point m_0. En effet, soient α et β les coordonnées x et y du point m, et a et b celles du point m_0, de telle sorte que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ soit la racine cherchée, et $a + b\sqrt{-1}$ sa première valeur approchée; si nous posons

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1} + h + k\sqrt{-1},$$

nous aurons, pour déterminer h et k d'après la méthode de Newton,

$$f_1(a, b) + h\varphi(a, b) - k\psi(a, b) = 0,$$
$$f_2(a, b) + h\psi(a, b) + k\varphi(a, b) = 0.$$

En posant, pour simplifier,

$$\frac{df_1(x, y)}{dx} = \varphi(x, y), \qquad \frac{df_2(x, y)}{dx} = \psi(x, y),$$

de ces deux équations on tire

$$\sqrt{h^2 + k^2} = \frac{\sqrt{[f_1(a, b)]^2 + [f_2(a, b)]^2}}{\sqrt{[\varphi(a, b)]^2 + [\psi(a, b)]^2}},$$

$$\frac{k}{h} = -\frac{\psi(a, b)f_1(a, b) - \varphi(a, b)f_2(a, b)}{\varphi(a, b)f_1(a, b) + \psi(a, b)f_2(a, b)}.$$

Cela nous montre que la droite qui joint le point m_0 au

point correspondant à la seconde valeur approchée, a

$$\frac{\sqrt{[f_1(a,b)]^2+[f_2(a,b)]^2}}{\sqrt{[\varphi(a,b)]^2+[\psi(a,b)]^2}}$$

pour longueur, et

$$-\frac{\psi(a,b)f_1(a,b)-\varphi(a,b)f_2(a,b)}{\varphi(a,b)f_1(a,b)+\psi(a,b)f_2(a,b)}$$

pour coefficient angulaire.

Considérons maintenant le plan tangent à la surface représentée par l'équation (2), au point M_0 projeté en m_0, l'équation de ce plan est

$$\begin{aligned} z &- [f_1(a,b)]^2 - [f_2(a,b)]^2 \\ &= 2[f_1(a,b)\varphi(a,b)+f_2(a,b)\psi(a,b)](x-a) \\ &- 2[f_1(a,b)\psi(a,b)-f_2(a,b)\varphi(a,b)](y-b), \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\frac{df_1(x,y)}{dy} = -\frac{df_2(x,y)}{dx} = -\psi(x,y),$$

$$\frac{df_2(x,y)}{dy} = \frac{df_1(x,y)}{dx} = \varphi(x,y);$$

par conséquent, l'équation de sa trace RT sur le plan des (x, y) est

$$\begin{aligned} &- [f_1(a,b)]^2 - [f_2(a,b)]^2 \\ &= 2[f_1(a,b)\varphi(a,b)+f_2(a,b)\psi(a,b)](x-a) \\ &- 2[f_1(a,b)\psi(a,b)-f_2(a,b)\varphi(a,b)](y-b). \end{aligned}$$

Au moyen du coefficient angulaire de cette droite, on reconnaît déjà qu'elle est perpendiculaire à la droite qui joint le point m_0 au point correspondant à la seconde valeur approchée de la racine $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. En second lieu, la distance du point m_0 à la ligne RT est

$$\frac{\sqrt{[f_1(a,b)]^2+[f_2(a,b)]^2}}{2\sqrt{[\varphi(a,b)]^2+[\psi(a,b)]^2}},$$

c'est-à-dire la moitié de la distance du point m_0 au point qui représente la seconde valeur approchée de la racine $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; donc, comme nous l'avons énoncé, ce dernier point s'obtient en abaissant du point m_0 une perpendiculaire sur la ligne RT, et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même. Il suit de là et de ce que nous avons dit plus haut, que toutes les fois qu'on partira d'une valeur approchée répondant à un point m_0 situé dans un contour ABCDA qui ne contiendra qu'un point-racine de l'équation (1) et qui sera tel, que dans toute l'étendue projetée dans ce contour, la surface représentée par l'équation (2) tournera sa convexité du côté du plan des (x, y), la méthode conduira à une valeur plus approchée que celle dont on sera parti.

Reste à indiquer le moyen de reconnaître si le contour ABCDA remplit les conditions que l'on vient d'énoncer, non-seulement pour le point de départ m_0, mais encore pour les points m_1, m_2, etc., de plus en plus rapprochés de m, que la méthode de Newton fait successivement connaître.

Remarquons d'abord que puisque, dans le voisinage du point m, la surface représentée par l'équation (2) tourne sa convexité du côté du plan des (x, y), cette propriété subsistera pour tous les points projetés dans l'intérieur du contour ABCDA, à moins que ce contour ne contienne des points vérifiant la condition

$$rt - s^2 = 0,$$

où r, s, t représentent, selon l'usage, les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ déduits de l'équation (2). Évaluant r, s, t, et simplifiant au moyen des relations

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx},$$

$$\frac{d^2P}{dy^2} = -\frac{d^2Q}{dx\,dy} = -\frac{d^2P}{dx^2}, \qquad \frac{d^2Q}{dy^2} = \frac{d^2P}{dx\,dy} = -\frac{d^2Q}{dx^2},$$

on voit que l'équation précédente revient à

$$\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right]^2 - [P^2 + Q^2]\left[\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right)^2\right] = 0.$$

On sera sûr qu'il n'existe aucun point dans le contour ABCDE, dont les coordonnées x et y vérifient cette équation; si, en appelant A′ un nombre plus petit que la plus petite valeur que prend l'expression

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2$$

pour toutes les valeurs de x et de y qui se rapportent à l'intérieur du contour ABCDA, et B′ et B″ des nombres respectivement plus grands que les plus grandes valeurs que prennent les deux expressions

$$P^2 + Q^2, \qquad \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)^2$$

pour les mêmes valeurs de x et de y, on a

$$A'^2 > BB''.$$

Or, supposons que le contour ABCDA qui, par hypothèse, ne contient qu'un point-racine de l'équation (1), ne renferme aucun point-racine de l'équation

$$f'(t) = 0,$$

par conséquent, que l'expression

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2$$

ne devienne jamais nulle dans le contour : cette expression étant le carré d'un module, et, comme telle, ne pouvant

avoir d'autre minimum que zéro, n'aura aucun minimum dans l'intérieur du contour ABCDA; donc la plus petite valeur qu'elle prendra, quand x et y varieront de manière à correspondre toujours à des points situés dans le contour, aura lieu pour un point du contour même. Cela posé, soient

$$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y$$

les équations respectives des quatre droites qui forment le contour ABCDA. Faisons successivement

$$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y,$$

dans l'expression

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2,$$

et cherchons une quantité δ plus petite que la plus petite des valeurs que prennent les résultats obtenus lorsque, dans les deux premières, on fait varier y de y_0 à Y, et, dans les deux autres, x de x_0 à X (*) : on pourra poser évidemment

$$A' = \delta;$$

de même chacune des expressions

$$P^2 + Q^2, \qquad \frac{d^2 P}{dx^2} + \left(\frac{d^2 Q}{dx^2}\right)^2$$

étant le carré d'un module et ne pouvant, par conséquent, avoir de maximum que l'infini, ne pourra présenter aucun maximum dans le contour ABCDA: donc le maximum de chacune de ces quantités, quand x et y varieront de manière à correspondre toujours à des points du contour ABCDA, aura lieu pour un point situé dans le contour même. Ainsi, faisant successivement, dans les deux ex-

---

(*) Au moyen du théorème de M. Sturm, on peut toujours obtenir la quantité δ quand, du moins, la fonction f est algébrique.

pressions précédentes,

$$x = x_0, \quad x = \mathrm{X}, \quad y = y_0, \quad y = \mathrm{Y},$$

et opérant comme plus haut, on pourra trouver un nombre B plus grand que la plus grande valeur que reçoit $P^2 + Q^2$ pour les différents points situés dans le contour ABCDA, et un nombre B'' plus grand que la plus grande valeur de $\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)^2$ pour les mêmes points. Cela fait, si les valeurs trouvées pour A', B', B'' satisfont à la condition

$$A'^2 > BB'',$$

on sera sûr, comme on l'a dit plus haut, que la surface représentée par l'équation (2) tourne sa convexité vers le plan des (x, y) en tous les points projetés dans le contour ABCDA; si, au contraire, on a

$$A'^2 < BB'',$$

on ne pourra rien conclure, et il faudra resserrer le contour; du reste, il est évident qu'on finira par avoir

$$A'^2 > BB'',$$

puisque l'expression

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2$$

reste toujours au-dessous d'une certaine limite, tandis que la suivante,

$$P^2 + Q^2,$$

s'approche de zéro indéfiniment.

Supposons donc que nous ayons trouvé un contour ABCDA tel, qu'en tous les points projetés dans ce contour, la surface représentée par l'équation (2) présente sa convexité vers le plan des (x, y). Si nous prenons comme

première valeur approchée de la racine cherchée

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

le nombre imaginaire répondant à un point m_0 de l'intérieur de ce contour, et que nous appliquions la méthode de Newton, nous aurons, d'après ce qui a été remarqué plus haut, une seconde valeur plus approchée que la première, en ce sens que le point m_1 qui lui correspondra sera plus voisin du point m que le point m_0 répondant à la première valeur approchée; mais ce point m_1 sera-t-il, comme le point m_0, dans l'intérieur du contour ABCDA, et serons-nous sûrs, en appliquant de nouveau la méthode de Newton, d'obtenir une valeur encore plus approchée? Évidemment non. Il est indispensable de prendre, en outre, les dispositions suivantes.

Considérons l'expression

$$\frac{P^2 + Q^2}{4\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]},$$

qui, d'après ce que l'on a vu plus haut, est égale au carré de la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (x, y) sur la trace du plan tangent à la surface représentée par l'équation (2), au point dont le point (x, y) est la projection. Cette expression sera moindre que le carré de la distance du point (x, y) au point m, si le point (x, y) ne sort pas du contour ABCDA. Or, faisant parcourir tout le contour au point (x, y), déterminons une quantité ε plus petite que la plus petite valeur de l'expression

$$\frac{P^2 + Q^2}{4\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]},$$

puis resserrons ce contour ABCDA jusqu'à ce que nous

ayons obtenu un nouveau contour $A'B'C'D'A'$ rectangulaire comme le premier, et tel que le carré de la diagonale $A'C'$ ou $B'D'$ soit $= \varepsilon$ ou $< \varepsilon$. Il est clair que tous les points de ce nouveau contour seront plus voisins du point m que celui des points du contour ABCDA qui en est le plus voisin; par conséquent, tous les points plus voisins du point m que les points du contour $A'B'C'D'A'$ seront nécessairement dans l'intérieur du contour ABCDA. Si donc on prend comme première valeur approchée de la racine une valeur répondant à un point du contour $A'B'C'D'A'$, on sera sûr que toutes les valeurs approchées suivantes, obtenues par la méthode de Newton, répondront à des points situés dans le contour ABCDA, et la méthode de Newton s'appliquera avec certitude. Quant au nombre ε, on comprend qu'il est très-facile à déterminer. En effet, en cherchant, comme on a vu plus haut, un nombre B plus grand que la plus grande des valeurs que reçoit

$$P^2 + Q^2$$

pour les différents points du contour ABCDA, on a pu trouver en même temps un nombre A plus petit que la plus petite de ces valeurs; comme aussi en cherchant un nombre B' plus petit que la valeur minimum de

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2,$$

on a pu déterminer un nombre B' plus grand que la valeur maximum : or, il est clair que, ces deux nombres étant connus, on peut poser

$$\varepsilon = \frac{A}{4B'}.$$

Il nous reste à examiner si l'application suffisamment prolongée de la méthode de Newton conduit à une valeur approchée aussi voisine qu'on puisse le désirer de la valeur exacte de la racine. Pour cela, nous allons chercher à éva-

luer le degré d'approximation fourni par chaque opération.

Soient toujours $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ la racine qu'il s'agit de calculer, $a + b\sqrt{-1}$ la première valeur approchée prise arbitrairement, mais répondant à un point du contour $A'B'C'D'A'$, et $a' + b'\sqrt{-1}$ la seconde valeur approchée obtenue par la méthode de Newton ; on aura

$$(3) \qquad f_1(\alpha, \beta) = 0, \quad f_2(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(4) \quad f_1(a, b) + (a' - a)\varphi(a, b) - (b' - b)\psi(a, b) = 0,$$

$$(5) \quad f_2(a, b) + (a' - a)\psi(a, b) + (b' - b)\varphi(a, b) = 0.$$

Or les deux équations (3) donnent, au moyen de la série de Taylor,

$$\begin{aligned} &f_1(a, b) + (\alpha - a)\varphi(a, b) - (\beta - b)\psi(a, b) \\ &+ \frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2}\chi[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] \\ &- (\alpha - a)(\beta - b)\lambda[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] = 0, \\ &f_2(a, b) + (\alpha - a)\psi(a, b) + (\beta - b)\varphi(a, b) \\ &+ \frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2}\lambda[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)] \\ &+ (\alpha - a)(\beta - b)\chi[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)] = 0, \end{aligned}$$

en posant

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d^2Q}{dx\,dy} = -\frac{d^2P}{dy^2} = \chi(x, y),$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{d^2P}{dx\,dy} = -\frac{d^2Q}{dy^2} = \lambda(x, y),$$

et représentant par θ et θ_1 deux nombres compris entre 0 et 1.

Simplifiant les équations précédentes au moyen des équations (4) et (5), on a encore

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - a')\varphi(a, b) - (\beta - b')\psi(a, b) \\ &+ \frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2}\chi[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] \\ &- (\alpha - a)(\beta - b)\lambda[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)] = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(7) \begin{cases} (\alpha - a')\psi(a, b) + (\beta - b')\varphi(a, b) \\ + \dfrac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2} \lambda[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)] \\ + (\alpha - a)(\beta - b)\chi[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)] = 0; \end{cases}$$

mais si l'on considère les deux expressions

$$\frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2} \chi(x, y) - (\alpha - a)(\beta - b)\lambda(x, y),$$

$$\frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2} \lambda(x, y) + (\alpha - a)(\beta - b)\chi(x, y),$$

et que l'on prenne la racine carrée de la somme de leurs carrés, on trouve

$$\frac{(\alpha - a)^2 + (\beta + b)^2}{2} \sqrt{[\chi(x, y)]^2 + [\lambda(x, y)]^2};$$

c'est-à-dire un nombre moindre que

$$\frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2} \sqrt{B''},$$

quand, du moins, x et y se rapportent à des points situés dans le contour ABCDA : cela nous montre que chacune des deux expressions

$$\frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2} \chi[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)]$$
$$- (\alpha - a)(\beta - b)\lambda[a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b)],$$

$$\frac{(\alpha - a)^2 - (\beta - b)^2}{2} \lambda[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)]$$
$$+ (\alpha - a)(\beta - b)\chi[a + \theta_1(\alpha - a), b + \theta_1(\beta - b)],$$

est, quels que soient θ et θ_1, moindre aussi en valeur absolue que

$$\frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2} \sqrt{B''}.$$

On peut donc écrire de la manière suivante les équations

(6) et (7) :

$$(\alpha - a')\,\varphi(a, b) - (\beta - b')\,\psi(a, b)$$
$$= \pm\,\theta_2\,\frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2}\sqrt{B''},$$
$$(\alpha - a')\,\psi(a, b) + (\beta - b')\,\varphi(a, b)$$
$$= \pm\,\theta_3\,\frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2}\sqrt{B''},$$

θ_2 et θ_3 étant des nombres positifs moindres que 1.

Prenant la racine carrée de la somme des carrés des deux membres, il vient

$$[(\alpha - a')^2 + (\beta - b')^2]^{\frac{1}{2}}\left\{[\varphi(a, b)]^2 + [\psi(a, b)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= [\theta_2^2 + \theta_3^2]^{\frac{1}{2}}\,\frac{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}{2}\sqrt{B''};$$

d'où l'on tire

$$[(a - \alpha')^2 + (\beta - b')^2]^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,[(a - \alpha)^2 + (\beta - b)^2].$$

Or l'expression

$$[(a - \alpha)^2 + (\beta - b)^2]^{\frac{1}{2}}$$

représente la distance du point m_0 qui correspond à la première valeur approchée au point-racine m, et l'expression

$$[(\alpha - a')^2 + (\beta - b')^2]^{\frac{1}{2}}$$

représente la distance du point m_1 correspondant à la seconde valeur approchée au même point; donc, en appelant δ et δ_1 ces distances, on voit que l'on a

$$\delta_1 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta^2,$$

ou bien

$$\delta_1 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta\right)\delta;$$

de même, en appelant $\delta_2, \delta_3, \delta_4, \ldots,$ les distances du point m aux points correspondants à la troisième, à la quatrième, à la cinquième, etc., valeur approchée, on a

$$\delta_2 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta_1^2, \quad \text{ou bien} \quad \delta_2 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta\right)^3 \delta,$$

$$\delta_3 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta_2^2, \quad \text{ou bien} \quad \delta_3 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta\right)^7 \delta,$$

$$\delta_4 < \sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta_3^2, \quad \text{ou bien} \quad \delta_4 < \left(\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta\right)^{15} \delta,$$

. . . .

Cela nous montre que si, aux conditions précédemment exigées, on ajoute celle-ci

$$\sqrt{\frac{B''}{2A'}}\,\delta < 1,$$

ce que l'on peut toujours faire en resserrant suffisamment le contour $A'B'C'D'A'$, la distance du point m aux points correspondants aux valeurs approchées finira par devenir aussi petite qu'on le voudra.

De ce qui précède, on conclut facilement le nombre de décimales exactes fournies par chaque opération dans la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de la racine imaginaire que l'on calcule; mais nous renverrons sur ce point à la Note que M. Cauchy a insérée à la suite de ses Leçons de calcul différentiel, Note dans laquelle l'illustre analyste a été conduit à des résultats analogues à ceux que l'on vient de faire connaître, quoique la méthode qu'il a suivie soit en tout différente de la nôtre.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. J. STEINER (*)

(voir t. XII, p. 118) ;

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
Du petit séminaire d'Iseure.

Le point A se meut sur une droite perpendiculaire sur le milieu de BC; le point a se meut de même sur une droite perpendiculaire élevée sur le milieu de bc; les triangles ABC, abc sont dans un même plan, et l'angle BAC est constamment égal à bac. L'axe radical des deux cercles circonscrits aux deux triangles a pour enveloppe deux points fixes : l'un correspondant aux mouvements qui ont lieu dans le même sens, et l'autre à ceux qui ont lieu dans des sens opposés. (STEINER.)

Prenons pour axe des x la droite qui joint les milieux D, d de BC et de bc, et pour axe des y une perpendiculaire élevée sur le milieu O de la droite Dd. Soient Π et ϖ les angles formés avec la direction Dd par les parties des perpendiculaires DA et da qui s'étendent du côté des y positives.

Les demi-droites AB et AC forment au point A deux angles, dont l'un est l'angle BAC du triangle, et l'autre est égal à 2π — BAC; nous désignerons par α celui de ces deux angles qui s'étend du côté des y négatives, de sorte que l'angle α variera de o à 2π, tandis que l'ordonnée du point A passera de $+\infty$ à $-\infty$. Nous désignerons par α' l'angle analogue pour le triangle abc. Ainsi on aura

$$\alpha' = \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha' = 2\pi - \alpha,$$

(*) M. Hen. Dellac, maître d'études au collége de Rochefort, a envoyé une autre solution et fait la bonne observation que l'enveloppe de la droite des centres est une parabole.

suivant que les mouvements auront lieu dans le même sens ou dans des sens opposés.

Posons

$$BC = 2A, \quad bc = 2a, \quad Dd = 2d,$$

et désignons par Γ, Δ, R; γ, δ, r, les coordonnées du centre et le rayon de chacun des deux cercles circonscrits. L'axe radical aura pour équation

$$2(\Gamma-\gamma)x+2(\Delta-\delta)y-(\Gamma^2+\Delta^2-R^2)+(\gamma^2+\delta^2-r^2)=0;$$

d'ailleurs on aura

$$R = \frac{\pm A}{\sin\alpha}, \qquad r = \frac{\pm a}{\sin\alpha'},$$

$$\Gamma = A\cot\alpha.\cos\Pi - d, \quad \gamma = a\cot\alpha'.\cos\varpi + d,$$

$$\Delta = A\cot\alpha.\sin\Pi, \qquad \delta = a\cot\alpha'.\sin\varpi.$$

L'équation de l'axe radical deviendra donc

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad 2(A\cot\alpha\cos\Pi - a\cot\alpha'.\cos\varpi - 2d)x \\ + 2(A\cot\alpha.\sin\Pi - a\cot\alpha'\sin\varpi)y + (A^2-a^2) \\ + 2d(A\cot\alpha\cos\Pi + a\cot\alpha'.\cos\varpi) = 0; \end{array}\right.$$

si les mouvements s'exécutent dans le même sens, on a $\alpha' = \alpha$, et l'équation devient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad 2[\cot\alpha(A\cos\varpi - a\cos\varpi) - 2d]x \\ + 2\cot\alpha(A\sin\Pi - a\sin\varpi)y + (A^2-a^2) \\ + 2d\cot\alpha(A\cos\Pi + a\cos\varpi] = F(x,y,\alpha) = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation est de la forme

$$P\cot\alpha + Q = 0;$$

P et Q sont des fonctions linéaires de x et y. On satisfait à cette équation en posant $P=0$, $Q=0$; donc l'enveloppe est un point.

Si les mouvements ont lieu dans des sens opposés, alors $\alpha' = 2\pi - \alpha$, et l'on parvient au même résultat.

On pourrait discuter les divers cas auxquels donneraient lieu les diverses hypothèses que l'on pourrait faire sur les valeurs relatives des constantes A, a, Π, ϖ, d; c'est un exercice qui n'offre pas de difficulté.

QUESTIONS.

273. Le triangle ABC a un sommet fixe A; un angle constant A; les sommets B et C sont sur une droite fixe. Quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle?

274. n plans sont donnés; par un point fixe C, on mène un plan mobile formant avec le premier plan un angle α_1; avec le second plan un angle α_2...; donne avec le $n^{ième}$ plan un angle α_n. On la relation

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + \ldots + a_n \cos\alpha_n = \text{constante},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n quantités données. Le plan mobile engendre un cône droit. A chaque valeur de la constante correspond un autre cône. Tous ces cônes ont même axe. Lorsque le cône se réduit à son axe, la somme $\sum_1^n a_p \cos\alpha_p$ est un *minimum;* et lorsque le cône devient un plan, cette somme est un *maximum.* (STEINER.)

275. Aucun nombre de la forme $m^2(8x+7)$ ne peut être la somme de trois carrés.

276. Trois points A, B, C étant liés de manière à conserver toujours les mêmes angles, si trois forces appliquées à ces points sont en équilibre, il faut, outre les conditions ordinaires, que les trois points et le point de rencontre des trois forces soient sur une même circonférence. (MÖBIUS.)

277. Si plusieurs points sont mobiles dans un plan de manière que la figure qu'ils forment reste toujours sem-

blable à elle-même, et si des forces qui agissent sur ces points sont en équilibre, l'équilibre subsistera pour toute autre position qu'on peut donner aux points, pourvu que les forces conservent leurs directions primitives.

(Möbius.)

278.

$$\begin{aligned}&[(b'c'')x + (c'a'')y + (a'b'')z]^2\\ &+ [(b''c)x + (c''a)y + (a''b)z]^2\\ &+ [(bc')x + (ca')y + (ab')z]^2 = k^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[(b'c'')x + (b''c)y + (bc')z]^2\\ &+ [(c'a'')x + (c''a)y + (ca')z]^2\\ &+ [(a'b'')x + (a''b)y + (ab')z]^2 = k^2,\end{aligned}$$

étant les équations de deux ellipsoïdes, axes rectangulaires, les ellipsoïdes sont égaux. Les crochets désignent des déterminants binaires. (Jacobi.)

SUR LES SOMMES DE PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE;

Par M. Angelo GENOCCHI,
Avocat.

Pour obtenir l'expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique donnée, on peut employer la série

$$\frac{1}{u^n} + \left(\frac{1}{u^n}\right)' fu + \frac{1}{1.2}\,\frac{d.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^2}{du} + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^2.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^3}{du^2}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4}\,\frac{d^3.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^4}{du^3} + \ldots,$$

où fu désigne une fonction entière de u, et $\left(\frac{1}{u^n}\right)'$ la dérivée $-nu^{-n-1}$ de $\frac{1}{u^n}$; en effet, cette série, qui, prise en entier, représente la puissance $(-n)^{ième}$ d'une racine t de l'équation

$$t = u + ft,$$

exprime la somme des puissances $(-n)^{ièmes}$ de toutes les racines de cette équation, en ne conservant que les puissances négatives de u. Ce beau théorème a été démontré par Lagrange, dans les *Mémoires de Berlin* pour 1768, et dans le *Traité de la Résolution des équations numériques*, Note XI; et il me semble qu'on doit être surpris de ne pas le trouver dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

Ce théorème s'applique à l'équation

$$t = u + ht^2,$$

en prenant

$$ft = ht^2;$$

le terme général

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\frac{d^{p-1}\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^p}{du^{p-1}}$$

deviendra

$$(-1)^p \cdot \frac{n(n-2p+1)(n-2p+2)\ldots(n-p-1)}{1.2.3\ldots p} h^p u^{-(n-p)};$$

et, comme on doit omettre les termes dans lesquels l'exposant de u est positif, on assignera à p les seules valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, ou même les seules qui ne surpassent pas $\frac{n}{2}$, car pour les autres le coefficient du terme général s'annule. Ainsi on aura, en appelant x, y

les racines de l'équation proposée,

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}=u^{-n}-nhu^{-(n-1)}+\frac{n(n-3)}{1.2}h^2u^{-(n-2)}$$
$$-\frac{n(n-5)(n-4)}{1.2.3}h^3u^{-(n-3)}+\ldots$$
$$+(-1)^p\frac{n(n-2p+1)(n-2p+2)\ldots(n-p-1)}{1.2.3\ldots p}h^pu^{-(n-p)}+\ldots.$$

Si nous supposons $h=u$, nous aurons $y=\frac{1}{x}$, et en faisant $\frac{1}{u}=z$, nous obtiendrons une expression de $x^n+\frac{1}{x^n}$ en fonction de $z=x+\frac{1}{x}$, qui ne différera point de l'expression du polynôme V_n donnée par M. Serret dans sa XIV[e] leçon (*Algèbre supérieure,* page 78). On voit donc que le théorème de Lagrange conduit immédiatement à une formule à laquelle M. Serret ne parvient que par une méthode fort compliquée.

Au reste, pour trouver cette formule, on peut aussi se servir de la méthode indiquée dans l'ouvrage cité (I[re] leçon, page 10), ce qui en fournira une démonstration tout à fait élémentaire et assez simple. En faisant

$$z=x+y,\quad xy=1,$$

on a

$$1+t^2-tz=(t-x)(t-y),$$

et, par suite,

$$\frac{2t-z}{1+t^2-tz}=\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t-y};$$

d'où il résulte que dans le développement de la fraction $\frac{2t-z}{1+t^2-tz}$, le coefficient de la puissance t^{n-1} sera égal à

$$-\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}\right)=-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

Or

$$\frac{1}{1+t^2-tz}=\frac{1}{1+t^2}+\frac{tz}{(1+t^2)^2}+\frac{t^2z^2}{(1+t^2)^3}+\frac{t^3z^3}{(1+t^2)^4}+\ldots,$$

où le coefficient de z^m est $\frac{t^m}{(1+t^2)^{m+1}}$; de plus, le terme général du développement de $(1+t^2)^{-m-1}$ est

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}t^{2(p-1)};$$

de sorte que le terme général du développement de la fraction $\frac{1}{1+t^2-tz}$ sera

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}t^{2(p-1)+m}z^m.$$

Il est aisé d'en tirer celui qui se rapporte à la fraction $\frac{2t-z}{1+t^2-tz}$, car en multipliant l'expression précédente par $2t$, et remplaçant m par $m+1$, on aura

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\cdot 2t^{2p+m}z^{m+1}$$

pour le terme général de $\frac{2t}{1+t^2-tz}$, et en multipliant ce terme par z, et remplaçant p par $p+1$, on aura

$$(-1)^p\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2.3\ldots p}t^{2p+m}z^{m+1}$$

pour le terme général de $\frac{z}{1+t^2-tz}$; la différence de ces deux termes généraux sera le terme général cherché, savoir :

$$-(-1)^p\cdot\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p)}{1.2.3\ldots p}(m+1+2p).\,t^{2p+m}z^{m+1}.$$

Faisons

$$m+1+2p=n;$$

ce terme général devient

$$-(-1)^p \cdot \frac{(n-2p+1)(n-2p+2)\ldots(n-p-1)n}{1.2.3\ldots p} z^{n-2p} t^{n-1},$$

et donnera

$$(-1)^p \cdot \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p} z^{n-2p}$$

pour le terme général du polynôme qui sera le coefficient de t^{n-1} dans le développement de la fraction $-\frac{2t-z}{1+t^2-tz}$, c'est-à-dire pour le terme général de l'expression de

$$x^n+\frac{1}{x^n}=V_n.$$

On obtient de la même manière l'expression de la fonction

$$U_n=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1,$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} & x^n+y^n+x^{n-1}+y^{n-1}+\ldots+x+y+1 \\ & =\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\frac{x^n-y^n}{x-y}, \end{aligned}$$

puisque $xy=1$. En effet, on a

$$\frac{x-y}{1+t^2-tz}=\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t-y},$$

et, par suite, le coefficient de t^{n-1} dans le développement de la fraction $\frac{1}{1+t^2-tz}$ doit égaler

$$\frac{1}{x-y}\left(\frac{1}{y^n}-\frac{1}{x^n}\right)=\frac{x^n-y^n}{x-y};$$

or on a trouvé, pour le terme général du même développement,

$$(-1)^{p-1} \cdot \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)} t^{2(p-1)+m} z^m,$$

qui devient

$$(-1)^p \cdot \frac{(n-2p)(n-2p+1)\ldots(n-p-1)}{1.2.3\ldots p} z^{n-2p-1} t^{n-1},$$

si l'on change p en $p+1$, et qu'on fasse

$$2p+m = n-1;$$

donc

$$(-1)^p \cdot \frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p)}{1.2.3\ldots p} z^{n-2p-1}$$

sera le terme général du coefficient de t^{n-1} dans le développement indiqué, et, par suite, le terme général de l'expression de $\frac{x^n - y^n}{x-y}$. En remplaçant n par $n+1$, on aura le terme général de $\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}$, et la réunion des deux résultats donnera le terme général du polynôme U_n, lequel s'accorde avec la formule de la p. 180 de l'*Algèbre supérieure*.

Euler a donné, dans un de ses Mémoires (*Observationes circa radices æquationum, Novi Comm. Acad. Petropol.*, tome XV, *pro anno* 1770) un théorème qui revient à celui de Lagrange ci-dessus énoncé, comme l'a remarqué M. Ménabréa (*). Euler considère l'équation

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \ldots,$$

et forme l'expression de la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de ces racines; il trouve qu'en partageant les termes de cette expression en divers *ordres*, ceux de l'ordre $\lambda + 1$

(*) Où?

seront

$$+\frac{n(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}A^{n-2\lambda}O,$$

$$+\frac{n(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)\ldots(n-2\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}A^{n-2\lambda-1}P,$$

$$+\frac{n(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)\ldots(n-2\lambda-1)}{1.2.3\ldots\lambda}A^{n-2\lambda-2}Q+\ldots,$$

où les coefficients O, P, Q, ... doivent être déterminés à l'aide de l'équation

$$O+Pz+Qz^2+\ldots=(B+Cz+Dz^2+\ldots)^\lambda,$$

et où l'on doit omettre les termes contenant des puissances négatives de A; enfin il ajoute que la même expression représentera la puissance $n^{ième}$ de l'une des racines de la proposée, si l'on retient tous ses termes. Or, en faisant

$$\frac{1}{x}=t,\quad \frac{1}{A}=u,\quad -\frac{1}{A}(Bt^2+Ct^3+Dt^4+\ldots)=ft,$$

l'équation d'Euler devient

$$t=u+ft;$$

les puissances négatives de t et de u répondent aux puissances positives de x et de A, et, de plus, on a

$$A^\lambda.\left(\frac{1}{u^n}\right)(fu)^\lambda$$

$$=(-1)^{\lambda+1}.n\,(Ou^{-n-1}+Pu^{-n}+Qu^{-n-1}+\ldots).\,u^{2\lambda},$$

puisque

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-nu^{-n-1},$$

d'où il est clair que les termes de l'ordre $\lambda+1$ de l'expression d'Euler forment une somme égale au terme

$$\frac{d^{\lambda-1}.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^\lambda}{1.2.3\ldots\lambda du^{\lambda-1}}$$

de la série de Lagrange; et cela met hors de doute l'identité des deux théorèmes.

Ces formules s'appliquent avec la plus grande facilité aux équations trinômes, comme on l'a vu pour les équations du second degré; et aussi, c'est une série de Lambert relative aux équations trinômes qui a occasionné les recherches contemporaines de Lagrange et d'Euler sur ce sujet (*voir* un Mémoire de Lambert dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1770).

Les mêmes formules conduisent à celles de Waring rapportées dans les *Nouvelles Annales*, tome VIII, page 76; car le terme général du développement de la puissance $(B + Cz + Dz^2 + \ldots)^\lambda$ est représenté par

$$\frac{1.2.3\ldots\lambda}{1.2\ldots\rho.1.2\ldots\sigma.1.2\ldots\tau\ldots} B^\rho C^\sigma D^\tau \ldots z^p,$$

sous les conditions

$$\rho + \sigma + \tau + \ldots = \lambda, \quad \sigma + 2\tau + \ldots = p,$$

et l'on a

$$(n - \lambda - p - 1)(n - \lambda - p - 2)\ldots(n - 2\lambda - p + 1)$$
$$= \frac{1.2.3\ldots(n - \lambda - p - 1)}{1.2.3\ldots(n - 2\lambda - p)};$$

donc, si l'on change λ en u, p en $p - 2u$, on aura

$$\rho + \sigma + \tau + \ldots = u, \quad 2\rho + 3\sigma + 4\tau + \ldots = p,$$

et l'on verra que le coefficient de $A^{n-p}.B^\rho C^\sigma D^\tau, \ldots,$ dans l'expression cherchée, sera

$$\frac{n[n - p + u - 1]}{[\rho][\sigma][\tau]\ldots[n - p]},$$

les crochets désignant des produits continuels. C'est la valeur qu'on doit prendre pour R dans l'endroit cité (page 77), où je crois qu'il s'est glissé quelque erreur typographique dans l'expression de cette quantité.

Je remarque enfin qu'à l'aide des sommes de puissances, on détermine les autres fonctions symétriques entières des racines, et qu'on peut réduire, en vertu d'un théorème connu, à une fonction entière toute fonction rationnelle des racines. Ce théorème, que M. Abel Transon semble attribuer à M. Serret (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 81), est démontré dans un Mémoire de M. Gauss, du 16 septembre 1814 (*Comment. Soc. Gotting recent.*, tome III).

Note. On a vu que

$$-(-1)^p.\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p}(m+1+2p)$$

est le coefficient de $t^{2p+m}z^{m+1}$ dans le développement de la fraction $\frac{2t-z}{1+t^2-tz}$, et la méthode employée revient à démontrer que tel est le coefficient de t^{2p+m}, dans le développement de la fonction $\frac{2t^{m+2}}{(1+t^2)^{m+2}}-\frac{t^m}{(1+t^2)^{m+1}}$ (p. 263). Or ce coefficient se transforme en

$$-(-1)^p.\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}{1.2\ldots(m+1)}(m+1+2p),$$

en multipliant ses numérateurs et dénominateurs par $(p+1)(p+2)\ldots(m+1)$, si $p<m+1$, ou en les divisant par $(m+2)(m+3)\ldots p$, si $p>m+1$. Faisons $m+1+2p=k$, et, supposant m pair, changeons m en $2m$; il viendra

$$\begin{aligned}
k&=2p+2m+1,\\
2(p+1)&=k-2m+1,\\
2(p+2)&=k-2m+3,\\
2(p+3)&=k-2m+5,\ldots,\\
2(p+m)&=k-1,\\
2(p+m+1)&=k+1,\ldots,\\
2(p+2m-2)&=k+2m-5,\\
2(p+2m-1)&=k+2m-3,\\
2(p+2m)&=k+2m-1,
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit

$$2^{2m}.(p+1)(p+2)\,..(p+2m)$$
$$=(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)\ldots[k^2-(2m-1)^2],$$

et, par conséquent, le coefficient de t^{k-1}, dans le développement de la fonction $\frac{2\,t^{2m+2}}{(1+t^2)^{2m+2}}-\frac{t^{2m}}{(1+t^2)^{2m+1}}$, sera

$$-(-1)^{\frac{k-1}{2}+m}.\frac{k(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1.2.3\ldots(2m+1).2^{2m}}.$$

Cela conduit à la démonstration de l'équation suivante, que M. Cauchy a donnée dans les *Mémoires des Savants étrangers*, tome Ier, page 798, en la déduisant d'une intégration assez compliquée, et qu'il lui semblait difficile d'établir directement :

$$k-\frac{k(k^2-1)}{1.2.3.2^2}\frac{2}{1}+\frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{1.2.3.4.5.2^4}\frac{3.4}{1.2}$$
$$-\frac{k(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\frac{4.5.6}{1.2.3}+\ldots=1,$$

k étant un nombre impair. On peut la représenter par

$$\sum(-1)^m\frac{k(k^2-1)(k^2-9)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1.2.3\ldots(2m+1).2^{2m}}$$
$$\times\frac{(m+1)(m+2)\ldots2m}{1.2.3\ldots m}=1.$$

En effet, si l'on pose

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}}=b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots,$$

b_0, b_1, b_2,..., désignant des coefficients numériques, on aura

$$\left[1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=b_0+b_1\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+b_2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4$$
$$+b_3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^6+\ldots,$$

et comme

$$\left[1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{(1+t^2)^2-4t^2}{(1+t^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

il est clair que le coefficient de t^{k-1} dans

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m+2}-\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m}\right]b_m,$$

est le même que celui de t^{k-1} dans

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

c'est-à-dire, dans $-\frac{1}{1+t^2}$. Mais, en vertu du résultat précédent, le coefficient de t^{k-1}, dans le développement de

$$b_m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m+2}-\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m}\right],$$

est

$$-(-1)^{\frac{k-1}{2}+m}\cdot\frac{k(k^2-1)(k^2-9)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1.2.3\ldots(2m+1)}\cdot b_m,$$

que nous représenterons par $-(-1)^{\frac{k-1}{2}}.\mathrm{K}_m b_m$; et, par suite, $-(-1)^{\frac{k-1}{2}}.\sum\mathrm{K}_m b_m$ est aussi le coefficient de la même puissance t^{k-1} dans le développement de $-\frac{1}{1+t^2}$. On aura donc

$$\sum\mathrm{K}_m b_m=1,$$

puisque

$$-\frac{1}{1+t^2}=-1+t^2-t^4+t^6-t^8+\ldots$$

C'est là l'équation de M. Cauchy, car la formule du binôme donne

$$b_m = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2.3.\ldots m.2^m},$$

et il est évident que

$$1.2.3\ldots 2m = 1.3.5\ldots(2m-1).2.4.6\ldots 2m$$
$$= 1.3.5\ldots(2m-1).\,2^m.1.2.3\ldots m,$$

d'où

$$1.3.5\ldots(2m-1).2^m = (m+1)(m+2)\ldots 2m,$$

et, par suite,

$$b_m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots 2m}{1.2.3\ldots m.2^{2m}}.$$

On peut démontrer d'une manière semblable, pour toute valeur paire de k, l'équation

$$\sum(-1)^m \frac{k^2(k^2-4)(k^2-16)\ldots[k^2-(2m-2)]^2}{1.2.3\ldots 2m.2^{2m}}$$
$$\times\frac{(m+1)(m+2)\ldots 2m}{1.2.3\ldots m} = 0.$$

On a aussi, k étant impair,

$$\sum(-1)^m b_m \frac{(k^2-1)(k^2-9)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1.2.3\ldots 2m} = (-1)^{\frac{k-1}{2}},$$

$$\sum(-1)^m b_m.2^{2m}\frac{k(k^2-1)(k^2-4)\ldots(k^2+m^2)}{1.2.3\ldots(2m+1)} = 1;$$

si k est pair,

$$\sum(-1)^m b_m \frac{k(k^2-4)(k^2-16)\ldots(k^2-4m^2)}{1.2.3\ldots(2m+1)} = 1-(-1)^{\frac{k}{2}},$$

$$\sum(-1)^m b_m.2^{2m}\frac{k(k^2-1)(k^2-4)\ldots(k^2-m^2)}{1.2.3\ldots(2m+1)} = 0;$$

et, pour toute valeur entière positive de k,

$$\sum (-1)^m b_m \cdot 2^{2m} \frac{k^2 (k^2-1)(k^2-4)\ldots[k^2-(m-1)^2]}{1.2.3\ldots 2m} = 0.$$

Dans ces formules, b_m a la valeur indiquée ci-dessus.

THÉORÈMES SEGMENTAIRES.

1. *Lemme.* Si les trois coefficients de l'équation d'une droite sont des fonctions algébriques entières de degré m d'une variable, l'enveloppe de la droite est une ligne de degré $m(m-1)$.

Si $m = 1$, l'enveloppe est un point et les droites forment un faisceau.

Si $m = 2$, l'enveloppe est une conique.

2. Problème. *Soit*

$$y(az+\alpha) + x(bz+\beta) + cz + \gamma = 0$$

l'équation d'une droite variant avec z; a, α, b, β, c, γ *sont des constantes: quel est le rapport anharmonique de quatre de ces droites?*

Solution. Ce rapport anharmonique est le même que celui des quatre points d'intersection du faisceau avec l'un des axes, par exemple celui des x; les coordonnées de ces points sont

$$-\frac{cz_1+\gamma}{bz_1+\beta}, \quad -\frac{cz_2+\gamma}{bz_2+\beta}, \quad -\frac{cz_3+\gamma}{bz_3+\beta}, \quad -\frac{cz_4+\gamma}{bz_4+\beta};$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont des valeurs particulières de z.

Désignant ces quatre quantités par m_1, m_2, m_3, m_4, un rapport anharmonique est

$$\frac{(m_3-m_1)(m_4-m_2)}{(m_4-m_1)(m_3-m_2)}.$$

Or

$$m_3 - m_1 = \frac{c\beta(z_1 - z_3)}{(bz_1+\beta)(bz_3+\beta)};$$

on calcule de même les trois autres binômes. On conclut de là que le rapport anharmonique cherché est

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}.$$

Ainsi ce rapport dépend uniquement des valeurs particulières de la variable z, et il est indépendant des quantités constantes.

3. Théorème. *Si les six coefficients de l'équation d'une conique sont des fonctions linéaires d'une seule variable z; en donnant à z quatre valeurs particulières, on obtient quatre coniques; les quatre polaires d'un point quelconque (x', y'), relativement à ces quatre coniques, forment un faisceau dont le rapport anharmonique est indépendant de la position du point (x', y').*

Démonstration. L'équation de la polaire est

$$y(2Ay' + Bx' + D) + x(2Cx' + By' + E) + Dy' + Ex' + 2F = 0;$$

ces trois coefficients sont donc des fonctions linéaires de la variable z; donc, etc.

Corollaire. Si $B = z$ et si les cinq autres coefficients sont constants, l'équation représente le système de coniques passant par quatre mêmes points dont deux sont sur l'axe des x et deux sur l'axe des y; on a donc ces deux théorèmes connus :

1°. *Quand plusieurs coniques passent par quatre mêmes points, les polaires d'un cinquième point, prises par rapport à ces courbes, passent toutes par un même point.* (Lamé, *Examen des différentes Méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*; 1818.)

2°. *Les polaires relatives aux quatre coniques ont le même rapport anharmonique, quel que soit le cinquième point.*

Ce rapport est

$$\frac{(B_3 - B_1)(B_4 - B_2)}{(B_4 - B_1)(B_3 - B_2)}.$$

(Chasles, *Comptes rendus*, 30 mai 1835, page 948.) Le célèbre géomètre emploie ces théorèmes pour résoudre une question dont la solution est désirée depuis Newton : Étant donnés neuf points d'une courbe du troisième ordre, construire *géométriquement* l'intersection de la courbe par une droite passant par un quelconque des neuf points.

4. *Lemme.* Lorsque les quatre coefficients de l'équation d'un plan sont des fonctions linéaires d'une seule et même variable u, cette équation représente le système de plans passant par la même droite et formant un faisceau planaire. Le rapport anharmonique de ce faisceau ne dépend que des valeurs particulières de la variable u.

Démonstration. Soit

$$ax + by + cz + d = 0;$$

a, b, c, d sont des fonctions linéaires d'une variable u. L'équation peut se mettre sous la forme

$$Pu + Q = 0;$$

P et Q étant des fonctions linéaires de x, y, z; donc, etc.

5. Théorème. *Si les dix coefficients d'une équation générale d'une surface du second degré sont des fonctions linéaires d'une variable u; en donnant à cette variable quatre valeurs particulières, on obtient quatre surfaces; les quatre plans polaires d'un point quelconque (x', y', z'), pris par rapport à ces surfaces, forment un faisceau planaire dont le rapport anharmo-*

nique est indépendant de la position du point (x', y', z').

Même démonstration que ci-dessus et conséquences analogues.

6. *Lemme.* Lorsque les quatre coefficients de l'équation d'un plan sont des fonctions linéaires de deux variables u et v, cette équation représente le système de plans passant par le même point et formant une surface conique.

7. Théorème. *Si les dix coefficients d'une équation du second degré sont des fonctions linéaires de deux variables u et v; en donnant à ces variables des valeurs particulières, les plans polaires d'un point* (x', y', z'), *pris par rapport à ces surfaces, passent par un même point.*

SUR LES QUATERNIONS

De sir William-Rowan HAMILTON,

Professeur d'astronomie à l'Université de Dublin, astronome royal d'Irlande (*).

Nous croyons devoir déclarer que nous n'avons pas une opinion formée sur la valeur scientifique de cette théorie, et cela parce que nous ne l'avons pas suffisamment étudiée, n'ayant pas à notre disposition les écrits qui en traitent; mais nous croyons déjà être en état de donner

(*) Aujourd'hui, en France, les astronomes croient déroger en s'occupant des mathématiques *pures*. Heureux s'ils ne s'en déclarent pas les contempteurs! L'illustre directeur de l'Observatoire de Paris n'a osé prendre ces sciences *pures* sous son égide, qu'en montrant qu'elles ne s'opposent pas à la formation d'habiles ingénieurs et de bons officiers (*voir* sur l'*ancienne École Polytechnique*, 1853). A ce propos, on regrette que dans cet estimable opuscule, on ait omis, sans doute involontairement, le nom d'un ancien élève que le monde militaire et même la voix populaire proclament un des plus célèbres artilleurs de notre époque. Qui ne connaît pas les canons du général Paixhans?

à nos lecteurs l'idée d'une méthode qui commence à être cultivée chez nos voisins d'outre-Manche, et qui se rattache aux fécondes applications de la théorie des imaginaires, à la science de l'espace; applications qui sont le complément indispensable de la géométrie cartésienne.

Ce qui suit est extrait du *Philosophical Magazine*, t. XXV, juin-décembre 1844.

1. *Définition.* L'expression

$$Q = w + ix + jy + kr$$

est dite un *quaternion*, lorsque les quatre quantités w, x, y, z désignent des quantités réelles, positives, négatives ou nulles, et que les trois quantités i, j, k désignent des quantités imaginaires, soit $+\sqrt{-1}$, soit $-\sqrt{-1}$.

w, x, y, z sont les quantités *constituantes* du quaternion, et i, j, k *les unités imaginaires* du quaternion.

Observation. Chaque quaternion est donc susceptible de huit valeurs.

2. *Égalité de quaternions.* Soit un second quaternion

$$Q' = w' + ix' + jy' + kz';$$

si l'on a

$$Q = Q',$$

cette équation entraîne les quatre autres

$$w = w', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

3. *Addition et soustraction.*

$$Q \pm Q' = w \pm w' + i(x \pm x') + j(y \pm y') + k(z \pm z').$$

Ainsi *la somme ou la différence des constituants de deux quaternions sont les constituants de la somme ou de la différence des quaternions.*

4. *Produit de deux quaternions.* Prenant Q comme

multiplicateur, et Q′ comme *multiplicande,* on obtient

$$\begin{aligned}QQ' = & ww' + iwx' + jwy' + kwz' \\ & + ixw' + i^2xx' + ijxy' + ikxz' \\ & + jyw' + jiyx' + j^2yy' + jkyz' \\ & + kzw' + kizx' + kjzy' + k^2zz'.\end{aligned}$$

Pour ramener ce produit à la forme normale adoptée

$$QQ' = Q'' = w''' + ix''' + jy''' + kz''',$$

nous écrirons

$$(A) \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$(B) \qquad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$(C) \qquad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Les équations (A) ne donnent lieu à aucune observation; mais dans les équations (B) et (C) on voit que ij et ji sont de signes opposés; ce qui n'a pas lieu dans les imaginaires ordinaires : cette différence *conventionnelle* constitue le caractère d'une nouvelle espèce d'imaginaires, d'unités *imaginaires quaternionnes,* si l'on veut. En continuant, on en verra le but et l'utilité.

Au moyen des relations (A), (B), (C), on trouve

$$(D) \qquad \left\{\begin{aligned} w'' &= ww' - xx' - yy' - zz', \\ x'' &= wx' + xw' + yz' - zy', \\ y'' &= wy' + yw' + zx' - xz', \\ z'' &= wz' + zw' + xy' - yx'. \end{aligned}\right.$$

Observation. On n'a pas $QQ' = Q'Q$ comme dans la théorie ordinaire (*voir,* à la fin, la *division des quaternions*).

5. Posons

$$(E) \qquad \left\{\begin{aligned} w &= \mu \cos\theta, \\ x &= \mu \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= \mu \sin\theta \sin\varphi \cos\psi, \\ z &= \mu \sin\theta \sin\varphi \sin\psi. \end{aligned}\right.$$

De même quatre équations semblables pour le quaternion Q′ et Q″; on suppose μ, μ', μ'' des quantités positives. On aura

$$\text{(F)} \qquad \mu'' = \mu\mu',$$

car

$$\omega''^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 = (\omega^2 + x^2 + y^2 + z^2)(\omega'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) \text{ [*]}.$$

6. *Définitions.*

$\mu =$ module du quaternion ;
$\mu \sin\theta =$ rayon vecteur du quaternion ;
$\psi =$ longitude du quaternion ;
$\varphi =$ colatitude (complément de la latitude) du quaternion ;
$\theta =$ amplitude du quaternion.

7. L'équation (F) s'énonce ainsi : *Le module du produit Q″ de deux quaternions Q et Q′ est égal au produit de leurs modules.*

8. Les équations (D) donnent les deux suivantes :

$$\omega'\omega'' + x'x'' + y'y'' + z'z'' = \omega\,(\omega'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) = \omega\mu'^2,$$
$$\omega\omega'' + xx'' + yy'' + zz'' = \omega'(\omega^2 + x^2 + y^2 + z^2) = \omega'\mu^2.$$

Au moyen de ces deux équations, de la première des équations (D), et à l'aide des équations (F), on déduit

$$\text{(G)} \left\{ \begin{aligned} &\cos\theta = \cos\theta'\cos\theta'' \\ &+ \sin\theta'\sin\theta''[\cos\varphi'\cos\varphi'' + \sin\varphi'\sin\varphi''\cos(\psi' - \psi'')], \\ &\cos\theta' = \cos\theta''\cos\theta \\ &+ \sin\theta''\sin\theta[\cos\varphi''\cos\varphi + \sin\varphi''\sin\varphi\cos(\psi'' - \psi)], \\ &\cos\theta'' = \cos\theta\cos\theta' \\ &- \sin\theta\sin\theta'[\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi - \psi')]. \end{aligned} \right.$$

9. *Construction géométrique des équations* (G). Considérons x, y, z comme les trois coordonnées rectangulaires d'un point M dans l'espace ; soient $\mu\cos\theta$ le rayon

(*) Ce théorème n'est pas nouveau et a reçu une grande extension.

vecteur du point compté de l'origine O, ψ la longitude, et φ la colatitude. Concevons une sphère ayant l'origine O pour centre, et d'un rayon $= 1$; et soit R le point où cette sphère est rencontrée par le rayon vecteur OM ; nous appelons ce point R, *le point représentatif* du quaternion Q. Soient R′ et R″ les points représentatifs des quaternions Q′ et Q″ ; alors les équations (G) expriment que, *dans le triangle sphérique* R R′ R″ *formé par les points représentatifs de deux facteurs* Q *et* Q′ *et de leur produit* QQ′, *les angles* R, R′ *sont les amplitudes de deux facteurs, et l'angle* R″ *est le supplément de l'amplitude du produit*, c'est-à-dire que l'on a

(H) $$R = \theta, \quad R' = \theta', \quad R'' = \pi - \theta''.$$

10. Si dans les équations (B), (C) on avait posé

$$kj = i, \quad ji = k, \quad ik = j, \quad jk = -i, \quad ij = -k, \quad ki = -j,$$

alors, dans les équations (D), $yz' - zy'$ se serait changé en $zy' - yz'$, $zx' - xz'$ en $xz' - zx'$, $xy' - yx'$ en $yx' - xy'$; mais les équations (F) et (H), si simples et si mnémoniques, seraient restées les mêmes, et elles suffisent pour déterminer la position du point R″, en ayant égard à la direction positive de la rotation en longitude, selon qu'elle se fait à droite ou à gauche d'un spectateur placé dans l'axe $+z$. OR″ est à la droite ou à la gauche de OR′, par rapport à un spectateur placé en OR, selon que $+z$ est à la droite ou à la gauche de $+y$, par rapport à un spectateur placé en $+x$.

11. Soient

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma,$$

les coordonnées rectangulaires respectives des points R, R′, R″ ; on a évidemment pour la multiplication des

deux quaternions,

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}&[\cos R+(i\alpha+j\beta+k\gamma)\sin R][\cos R'+(i\alpha'+j\beta'+k\gamma')\sin R']\\&\quad=-\cos R''+(i\alpha''+j\beta''+k\gamma'')\sin R'';\end{aligned}\right.$$

effectuant la multiplication, ayant égard aux relations (A), (B), (C), on obtient

$$(\mathrm{K})\left\{\begin{aligned}-\cos R''&=\cos R\cos R'+(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')\sin R\sin R',\\ \alpha''\sin R''&=\alpha\sin R\cos R'+\alpha'\sin R'\cos R+(\beta\gamma'-\gamma\beta')\sin R\sin R',\\ \beta''\sin R''&=\beta\sin R\cos R'+\beta'\sin R'\cos R+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\sin R\sin R',\\ \gamma''\sin R''&=\gamma\sin R\cos R'+\gamma'\sin R'\cos R+(\alpha\beta'-\beta\alpha')\sin R\sin R'.\end{aligned}\right.$$

La première équation donne la relation connue entre un côté et les trois angles d'un triangle sphérique; les trois autres correspondent à ce théorème :

Si trois forces sont appliquées au centre O, *l'une égale à* $\sin R\cos R'$ *et dirigée vers* R, *et une seconde force égale à* $\sin R'\cos R$ *et dirigée vers* R', *et une troisième force* $\sin R\sin R'\sin RR'$ *dirigée dans le sens opposé à* OR'', *la résultante sera égale à* $\sin R''$, *et sera dirigée vers le pôle de l'arc* RR' *non situé du même côté que le point* R'' *relativement à l'arc* RR'.

Les quatre équations réelles (K) sont contenues dans l'équation imaginaire (I), en observant la règle de multiplication des quaternions; de même dans la trigonométrie plane, on déduit les formules fondamentales au moyen de la somme des sinus et cosinus d'une équation imaginaire, en observant la règle de multiplication des *couples* imaginaires $\cos\theta+i\sin\theta$ posant $i^2=-1$. On a ainsi un *algorithme spécial* pour la trigonométrie sphérique.

12. On a

$$Q^2=w^2-x^2-y^2-x^2+2w(ix+jy+kz),$$

en ayant égard aux équations (A), (B), (C) : donc, pour

que Q^2 soit égal à 1, il faut que l'on ait

$$w = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

alors

$$\mu = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

et

(L) $$\sqrt{-1} = i \cos\varphi + j \sin\varphi \cos\psi + k \sin\varphi \sin\psi.$$

φ et ψ étant arbitraires, on voit que $\sqrt{-1}$ correspond à une infinité d'expressions quaternionnes.

13. Si dans l'équation (I) on fait

$$R = R' = \frac{\pi}{2},$$

alors le point R'' est le pôle de l'arc RR', l'angle R a pour mesure RR', et l'on a

(M) $$\left\{\begin{array}{l}(i\alpha + j\beta + k\gamma)(i\alpha' + j\beta' + k\gamma') \\ = -\cos RR' + (i\alpha'' + j\beta'' + k\gamma'') \sin RR'.\end{array}\right.$$

Si l'on change α, β en α', β', et *vice versâ*, α'', β'', γ'' changent de signe, et l'on a

(N) $$\left\{\begin{array}{l}(i\alpha' + j\beta' + k\gamma')(i\alpha + j\beta' + k\gamma') \\ = -\cos RR' - (i\alpha'' + j\beta'' - k\gamma'') \sin RR';\end{array}\right.$$

écrivons

$$i\alpha + j\beta + k\gamma = i_R,$$
$$i\alpha' + j\beta' + k\gamma' = i_{R'};$$

alors on aura

(O) $$\mu(\cos\theta + i_R \sin\theta) \times \mu(\cos\theta - i_R \sin\theta) = \mu^2,$$

(P) $$i_R\, i_{R'} \cdot i_{R'}\, i_R = 1,$$

car

$$(i_R)^2 = (i_{R'})^2 = -1.$$

Les quaternions $i_R i_{R'}$ et $i_{R'} i_R$ sont dits *réciproques* l'un de l'autre.

Observation. Cela ne s'applique qu'aux quaternions pour lesquels la partie réelle w est nulle.

14. $i.jk = i.i = -1$, $ij.k = k.k = -1$; donc

$$i.jk = ij.k,$$

de même

$$j.ji = j.-k = -jk = -i, \quad jj.i = -i;$$

donc

$$j.ji = jj.i;$$

de là on conclut Q, Q′, Q″, désignant des quaternions complets :

(Q) $$Q.Q'Q'' = QQ'.Q'',$$

de même

(Q′) $$Q.Q'Q''Q''' = QQ'.Q''Q''' = QQ'Q''.Q''';$$

par conséquent,

$$i_R i_{R'}.i_{R'} i_R = i_R i_{R'} i_{R'}.i_R = -i_R.i_R = 1,$$

comme ci-dessus.

15. Les théorèmes exprimés dans les formules (Q) et (Q′) sont d'une grande importance dans le *calcul des quaternions*; ils tendent, autant que possible, à assimiler ce système de calcul à celui qui est employé dans l'algèbre ordinaire. Dans la multiplication ordinaire on peut partager chaque facteur en un nombre quelconque de parts, réelles ou imaginaires, et réunir ensuite les produits partiels; la même chose a lieu en opérant sur les quaternions. La *multiplication-quaternionne* possède le caractère *distributif* de la multiplication ordinaire : ainsi l'on a

$$Q(Q' + Q'') = QQ' + QQ''; \ (Q' + Q'')Q = Q'Q + Q''Q, \text{ etc.};$$

mais dans l'algèbre ordinaire l'on a

$$QQ' = Q'Q.$$

« Cette égalité du produit des facteurs, pris dans un ordre inverse, ne subsiste pas pour les quaternions ($ji = -ij$); le caractère *commutatif* se perd en passant dans la nouvelle manière d'opérer, et $Q'Q - QQ'$, au lieu d'être un symbole de zéro, représente une quantité imaginaire *pure*. D'un autre côté, pour les quaternions aussi bien que pour les facteurs ordinaires, nous pouvons, en général, *associer ensemble les facteurs, par groupes, de toutes les manières qui ne troublent pas leur ordre;* par exemple,

$$Q.Q'Q''.Q'''Q^{\text{IV}} = QQ'.Q''Q'''Q^{\text{IV}}.$$

Ainsi ce qu'on peut appeler le caractère *associatif* de l'opération, ainsi que le caractère *distributif*, sont *communs* aux quantités algébriques ordinaires. »

(*Traduction littérale.*)

Le même volume du *Magasin philosophique* (p. 489) contient une Lettre très-intéressante de sir Hamilton à son savant ami M. Jones Graves, où l'illustre géomètre trace la suite des idées qui l'ont mené au système des quaternions. On y trouve cette observation :

Division des quaternions. Les équations (D) donnent

$$w' = (ww'' + xx'' + yy'' + z'z'')(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1},$$
$$x' = (wx'' + zy'' - w''x - yz'')(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1},$$
$$y' = (xz'' + wy'' - yw'' - zx'')(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1},$$
$$z' = (yz'' + wz'' - zw'' - xy'')(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1};$$

d'où l'on déduit que *le module du quotient est le quotient des modules.*

Observation. La théorie des quaternions est la clef des *clefs algébriques* de M. Cauchy et y a évidemment donné naissance (*Comptes rendus,* 1853, 10 janv., p. 70, et 17 janv., p. 129). *Suum cuique!*

TABLE DES EXPRESSIONS DES SINUS DES ARCS CROISSANT PAR TROIS DEGRÉS A PARTIR DE TROIS DEGRÉS.

Observation. C'est la Table XIX de Lambert.

Notation :

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad b = \sqrt{\frac{3}{2}};$$
$$c = \sqrt{\frac{5}{2}}; \quad d = \sqrt{\frac{15}{2}};$$
$$e = \sqrt{5 + \sqrt{5}}; \quad f = \sqrt{5 - \sqrt{5}};$$
$$g = \sqrt{3} + 1; \quad h = \sqrt{3} - 1.$$

La notation n'est pas de Lambert.

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8}[-a - b + c + d - eh];$$

$$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}[f\sqrt{3} - c - a];$$

$$\sin 9^\circ = \frac{1}{4}[a + c - f];$$

$$\sin 12^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}[b - d + e];$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{2}[-a + b];$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}[-a + c];$$

$$\sin 21^\circ = \frac{1}{8}[a - b + c - d + fg];$$

$$\sin 24^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}[b + d - f];$$

$$\sin 27^\circ = \frac{1}{4}[-a + c + e];$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\sin 33^\circ = \frac{1}{8}[-a - b + c + d + eh];$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{4} f \sqrt{2};$$

$$\sin 39^\circ = \frac{1}{8}[a + b + c + d - fh];$$

$$\sin 42^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}[a - c + e\sqrt{3}];$$

$$\sin 45^\circ = a;$$

$$\sin 48^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}[-b + d + e];$$

$$\sin 51^\circ = \frac{1}{8}[-a + b - c + d + fg];$$

$$\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}[a + c];$$

$$\sin 57^\circ = \frac{1}{8}[-a + b + c - d + eg];$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2} b \sqrt{2};$$

$$\sin 63^\circ = \frac{1}{4}[-a + c + e];$$

$$\sin 66^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}[a + c + f\sqrt{3}];$$

$$\sin 69^\circ = \frac{1}{8}[a + b + c + d + fh];$$

$$\sin 72^\circ = \frac{1}{4} e \sqrt{2};$$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2}[a + b];$$

$$\sin 78^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[-a + c + e\sqrt{3}\right];$$

$$\sin 81^\circ = \frac{1}{4}\left[a + c + f\right];$$

$$\sin 84^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[b + d + f\right];$$

$$\sin 87^\circ = \frac{1}{8}\left[a - b - c + d + eg\right];$$

$$\sin 90^\circ = 1.$$

On peut calculer toutes ces lignes au moyen des trois sinus :

$$\sin 18^\circ, \quad \sin 30^\circ, \quad \sin 45^\circ;$$
$$\sin 48^\circ = \sin(18^\circ + 30^\circ);$$
$$\sin 3^\circ = \sin(48^\circ - 45^\circ), \text{ etc.}$$

Legendre donne la Table de 10 grades en 10 grades, ou de 9 degrés en 9 degrés. (*Trigonométrie*, § XXII.)

THÉORÈME SUR LES LIMITES DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. J.-J. SYLVESTER,
Avocat à Londres.

Soit

$$f(x) = 0$$

une équation algébrique de degré n, et supposons qu'en opérant sur $f(x)$ et $f'(x)$ comme dans le théorème de M. Sturm, on obtienne les n quotients

$$a_1x + b_1, \quad a_2x + b_2, \quad a_3x + b_3, \ldots, \quad a_nx + b_n;$$

il faut remarquer seulement qu'on obtient le $n^{ième}$ quo-

tient $a_n x + b_n$, en divisant l'avant-dernier résidu par le dernier résidu.

Formons la série de $2n$ quantités

$$\frac{\pm 2 - a_1}{b_1}, \quad \frac{\pm 2 - a_2}{b_2}, \quad \frac{\pm 2 - a_3}{b_3}, \ldots, \quad \frac{\pm 2 - a_n}{b_n};$$

il n'y a aucune racine de l'équation

$$f(x) = 0$$

entre la plus grande de ces quantités et $+\infty$, ni entre la plus petite de ces quantités et $-\infty$ (*).

SUR LES PROPRIÉTÉS

Des surfaces du second degré qui correspondent aux théorèmes de Pascal et de M. Brianchon, dans les coniques;

D'APRÈS M. GEORGE SALMON.

(Philosophical Magazine, t. XXIV, p. 49; 1844.)

---

1. Soient

$$S = 0$$

l'équation d'une conique A;

$$L = 0, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0$$

les équations de trois droites;

$$S - L^2 = 0, \quad S - L_1^2 = 0, \quad S - L_2^2 = 0$$

seront les équations de trois coniques B, C, D qui ont un double contact avec la conique A; A et B se touchent aux points où la droite L rencontre la conique A; A et C aux points où la droite L_1 coupe A, etc.: les deux co-

(*) Prochainement, une démonstration de ce théorème *généralisé*.

niques

$$\left.\begin{array}{l}\text{B et C}\\ \text{B et D}\\ \text{C et D}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{ont évidemment pour}\\ \text{cordes d'intersection}\end{array}\left\{\begin{array}{ll} L+L_1=0, & L-L_1=0;\\ L+L_2=0, & L-L_2=0;\\ L_1+L_2=0, & L_1-L=0.\end{array}\right.$$

Les trois premières droites et les trois dernières

$$L-L_1=0,\quad L_1-L_2=0,\quad L-L_2=0,$$
$$L-L_1=0,\quad L_1+L_2=0,\quad L+L_2=0,$$

passent respectivement par le même point.

De là, ce théorème :

Si trois coniques ont un double contact avec une quatrième conique, leurs six cordes d'intersection passent trois à trois par le même point; si chacune des trois coniques devient un système de deux droites, on a le théorème de M. Brianchon directement, et la réciproque donne le théorème de Pascal.

Observation. Les quatre droites représentées par

$$L-L_1=0,\quad L-L_2=0,\quad L=0,\quad L_1=0,$$

forment un faisceau harmonique.

2. Supposons maintenant que $S=0$ soit l'équation d'une surface du second degré, et que

$$L=0,\quad L_1=0,\quad L_2=0$$

soient les équations de trois plans. On démontre comme ci-dessus, le théorème suivant :

Si deux surfaces B *et* C *du second degré sont enveloppées par une troisième surface* A, *les surfaces* B *et* C *se couperont suivant deux courbes planes; ces deux plans et les deux plans de contact avec la surface forment un faisceau harmonique.*

Si trois surfaces du second degré B, C, D *sont enveloppées par une quatrième surface* A, *les plans d'intersection mutuelle* B, C, D *passent par le point d'inter-*

section des trois plans de contact, et elles passent trois à trois par les mêmes lignes droites.

Supposons que les surfaces B, C, D deviennent des cônes, nous aurons un théorème analogue à celui de M. Brianchon.

Réciproque de ce théorème :

Si l'on fait trois sections planes dans une surface du second degré, on peut faire passer deux cônes par deux quelconques de ces plans; les six sommets de ces six cônes sont dans un même plan et trois à trois sur une même droite, et forment ainsi les angles d'un quadrilatère complet.

Ce théorème est analogue à celui de Pascal. En effet, soient ABCDEF un hexagone inscrit dans une conique et G l'intersection des côtés opposés AB, DE; H l'intersection des côtés opposés BC, EF; K l'intersection des côtés opposés CD, FA. Imaginons maintenant que la conique représente une surface du second degré, et que AD, BE, CF représentent trois sections planes : ABGDE, BCHEF, CDKFA sont les trois cônes qui renferment ces sections, et les trois sommets G, H, K sont en ligne droite.

SOLUTION DE LA QUESTION 271 (STEINER)

(voir p. 99);

PAR M. T.-B. KHORASSANDJI, Arménien.

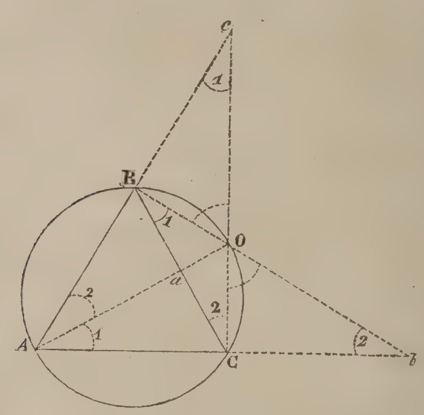
Théorème. *Par le point p et les sommets* A, B, C, *on mène trois droites rencontrant respectivement les côtés a, b, c en* a_1, b_1, c_1; *si l'on a*

$$Ap.Bp.Cp = a_1p\;b_1p.c_1p,$$

le lieu des points p est une ellipse circonscrite au triangle, et ayant pour centre, le centre de gravité du triangle.

Lemme. Soit O un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle équilatéral ABC; prolongeons OA, OB, OC jusqu'en a, b, c, où ces droites coupent les côtés opposés aux sommets A, B, C; nous aurons l'égalité

(A) $$OA \times OB \times OC = Oa \times Ob \times Oc.$$



Démonstration. A cause de l'égalité des trois arcs AB, BC, CA, et par suite de la théorie de la mesure des angles, il est facile de voir que les angles en c, b, marqués (1) et (2), sont égaux respectivement aux angles en A, marqués (1) et (2). D'ailleurs, chacun des angles BOc, BOa, COa et COb est égal à l'angle du triangle équilatéral. Cela posé,

1°. Les triangles semblables AOb, AOc donnent

$$\frac{OA}{Oc} = \frac{Ob}{OA},$$

d'où

(1) $$\overline{OA}^2 = Ob \cdot Oc;$$

2°. Les triangles semblables BOc, BOa donnent

$$\frac{BO}{Oa} = \frac{Oc}{OB},$$

d'où

(2) $$\overline{OB}^2 = Oc.Oa;$$

3°. Les triangles semblables COa, COb donnent

$$\frac{CO}{Ob} = \frac{Oa}{OC},$$

d'où

(3) $$\overline{OC}^2 = Oa.Ob.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1), (2) et (3), on trouve

$$\overline{OA}^2 \times \overline{OB}^2 \times \overline{OC}^2 = \overline{Oa}^2 \times \overline{Ob}^2 \times \overline{Oc}^2,$$

ou, enfin,

(A) $$OA \times OB \times OC = Oa \times Ob \times Oc.$$

C. Q. F. D.

Remarque I. On sait que l'on a

$$OA = OB + OC.$$

Donc, en remplaçant ces lignes par leurs valeurs, tirées des équations (1), (2) et (3), on a

$$\sqrt{Ob.Oc} = \sqrt{Oc.Oa} + \sqrt{Oa.Ob}.$$

Remarque II. On peut écrire l'équation (A) ainsi qu'il suit :

(A') $$\frac{OA}{Oa} \times \frac{OB}{Ob} \times \frac{OC}{Oc} = 1.$$

Sous cette forme, on voit que la relation est projective cylindriquement; mais si l'on fait une projection cylindrique de la figure précédente, le cercle devient une el-

lipse, le triangle équilatéral inscrit au cercle devient un triangle d'aire maximum inscrit dans l'ellipse, et ayant par suite son centre de gravité au centre même de l'ellipse. On retrouve ainsi le théorème de M. Steiner, qui fait l'objet de la question 271.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

TRAITÉ DE CALCUL DIFFÉRENTIEL A L'USAGE DES ASPIRANTS AU GRADE DE LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES; par M. l'abbé *Laurent*, ancien professeur de l'Université. Paris, Mallet-Bachelier, libraire, 1853; in-8°, XVI, 480 pages; figures dans le texte.

On préfère les wagons des chemins de fer aux véhicules traînés par les chevaux, parce qu'il y a économie de temps et de fatigue. Dans l'enseignement mathématique, il faut aussi viser à obtenir, autant que possible, ces deux économies; mais ce n'est pas le point le plus essentiel. Les sciences géométriques ont trois buts qu'il faut savoir distinguer. Le but *matériel* est d'apprendre à mesurer des distances, à métrer des aires, à cuber des volumes, à dessiner des figures semblables, à calculer des sommes et des forces, etc. Accoutumer l'esprit aux raisonnements sévères, aux déductions rigoureuses, aux méditations longues, persistantes, pénétrantes, c'est le but *intellectuel;* enfin il y a un but *moral,* et, certes, ce n'est pas le moins important. Il s'agit de raisonner, non pas en plaidant, en vue de gagner une cause par une dialectique *spécieuse,* mais uniquement pour découvrir la

vérité entière, sans mélange d'aucun intérêt personnel, d'aucune passion, d'aucune prévention individuelle; et, sous ce point de vue, les *Éléments* d'Euclide sont un chef-d'œuvre d'une haute moralité, qui devrait servir de prototype à l'éducation scientifique de la jeunesse.

Dans cet ouvrage immortel, on pose des *postulata*, en avouant de bonne foi ne pouvoir les démontrer. Ces *postulata* accordés, on n'invoque plus que le pouvoir indéclinable du syllogisme (*); ainsi le but intellectuel et moral est le premier besoin, constitue la vitalité mathématique. Toutefois il existe une méthode qui, atteignant ce but, a encore le privilége de réaliser les deux économies que nous avons ci-dessus indiquées. C'est la méthode infinitésimale, ou autrement le *calcul différentiel*. Cette méthode repose sur l'idée *obscure*, mais certaine, de l'existence d'un rapport *fini* entre quantités *infiniment* petites. Lorsque deux corps se meuvent uniformément avec des vitesses dans le rapport de 1000 à 1; dès le premier instant, ce rapport existe entre les premiers espaces parcourus quoique infiniment petits; le *comment* échappe à toute explication, mais l'existence est certaine. C'est ainsi que l'Acacia croît bien plus rapidement que le Chêne. Ce rapport entre le temps de croissance existe, sans nul doute, dès les premiers développements naissants des embryons respectifs; embryons qui sont eux-mêmes les produits d'embryons antérieurs, et ainsi de suite. Les différentielles

---

(*) Le célèbre Ramus a soumis Euclide à un examen logique dans un ouvrage extrêmement curieux : *P. Rami scholarum mathematicarum libri unus et triginta*. Francf., 1599.

Cet ouvrage contient des renseignements historiques d'un haut intérêt. Nous y reviendrons. C'est là qu'on lit le diplôme de Charles IX, qui met les chaires du Collége de France au concours, mesure sollicitée par Ramus. Un nommé Charpentier, ayant été écarté, se vengea en faisant égorger Ramus, dans la sanglante journée de 1572.

sont les embryons des *quantités*. Le calcul différentiel est en quelque sorte *l'ovologie* des mathématiques, et, de même que les Sciences naturelles et physiques ne doivent et ne devront leurs progrès qu'à l'étude de l'ovologie et des actions moléculaires, les Sciences exactes ont leurs racines primordiales dans le sol différentiel; en cultivant ce sol, elles ont acquis plus de richesses en un demi-siècle que dans quarante siècles auparavant, et c'est en persévérant dans cette culture qu'on peut espérer obtenir de nouvelles richesses et de pénétrer de plus en plus dans les profondeurs du monde moléculaire. De plus, ce calcul est d'une extrême facilité, pourvu, bien entendu, qu'on veuille bien l'expliquer d'une manière facile. C'est l'objet du présent *Traité*.

« J'ai tâché de ne jamais perdre de vue que la lucidité » et la rigueur doivent caractériser un livre élémentaire. » Désirant *populariser,* pour ainsi dire, cette partie fon» damentale des traités mathématiques, je ne me suis pas » laissé dominer par la crainte de paraître quelquefois » prolixe, en m'efforçant d'aplanir les difficultés d'une » science qui en renferme déjà assez de réelles sans en créer » d'autres par défaut de méthode ou de développements. » C'est pourquoi j'ai insisté sur les théories à proportion » de leur importance, et multiplié les exemples, confor» mément à ce conseil du géomètre anglais : *in scientiis* » *addiscendis, exempla prosunt magis quam præcepta.*» (NEWTON, *Arith. univ.*)

Le vénérable auteur est resté constamment fidèle à cette promesse. Des exemples simples et multipliés éclaircissent les abstractions des théorèmes, font concevoir la généralité théorique, offrent des points de repère et de repos à l'esprit.

Les méthodes de M. Cauchy servent de guide; mais partout ces méthodes sont mises à la portée du grand nombre, sont *popularisées*. Par exemple, pour expliquer le

rapport fini entre quantités infiniment petites, on prend un triangle ABC, et l'on inscrit dans l'angle A une droite DE parallèle à BC; on a $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$. Si la parallèle s'approche continuellement du sommet A; AD et AC diminuent constamment; mais leur rapport, même un instant avant que ces segments disparaissent simultanément, est constamment égal à $\frac{AB}{AC}$. L'existence du coefficient différentiel est rendue manifeste par le mouvement de rotation d'une sécante autour d'un point de la courbe. Il nous semble que, dans le même système d'exposition, on aurait pu abréger ce qu'on dit, au commencement, des dérivées de fonctions de fonctions et d'un ensemble de fonctions, etc. Est-il bien nécessaire de démontrer que, lorsque *deux fonctions sont égales, leurs dérivées et leurs différentielles sont aussi égales* (p. 12)? Il ne me paraît pas non plus convenable de commencer un paragraphe par la conjonction *ou* (§ 36, p. 16).

Dès la page 20, l'auteur adopte la notation si expressive de z'_x qui signifie le coefficient différentiel de z pris par rapport à x; ainsi, lorsqu'on a

$$u=\mathrm{F}(z),\quad z=f(y),\quad y=\varphi(x),$$

on peut écrire

$$u'_x=u'_z\, z'_y\, y'_x.$$

La différentielle partielle $d_y u$ est expliquée ensuite. Ainsi, si l'on a

$$u=\varphi(y,\ z),$$

y et z étant des fonctions de u, on a

$$du=d_y u+d_z u.$$

On donne pour exemple de différentiation des fonctions implicites, l'équation

$$(x-by^2)^{\frac{1}{3}}=(ax^3-y)^{\frac{1}{5}}\quad \text{(p. 29)}.$$

Les deux premiers chapitres (1-134) renferment tous les procédés différentiels appliqués aux fonctions et aux équations, algébriques et transcendantes, aux différentiations, médiates ou immédiates, partielles ou totales. La théorie si importante du changement de la variable indépendante, clairement développée, termine le premier chapitre. Les *déterminants* se produisant partout où il y a des transformations, on aurait pu en parler à cette occasion. Les théorèmes fondamentaux de Taylor et de Maclaurin, avec les limites des restes, sont bien détaillés et graduellement expliqués et appliqués.

Le chapitre III (139-220) contient les applications *analytiques*. On y indique le moyen ingénieux imaginé par Machin pour rendre très-convergente la série de Leibnitz qui donne la valeur de π; on a

$$\pi = 16\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right] - 4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^4} - \ldots\right] \quad \text{(p. 152)}.$$

Quand le développement de la tangente en fonction de l'arc avec la loi des coefficients, deviendra-t-il élémentaire?

Dans le développement en série des équations à deux variables, on donne, entre autres exemples, l'équation générale des coniques

$$y^2 - mx - nx^2 = 0 \quad \text{(p. 155)}.$$

La série de Lagrange est omise.

En traitant des expressions des lignes trigonométriques *circulaires* en fonctions exponentielles, il était facile de dire un mot des lignes trigonométriques *hyperboliques* qui préparent si bien aux fonctions elliptiques.

On donne le développement de $l(1 + e\cos v)$ (p. 175) et de $(1 + e\cos v)$ (p. 195), si utiles en Astronomie.

Les cas particuliers où les fonctions prennent les six valeurs singulières $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, sont étudiés avec soin. L'auteur donne de nombreux exemples bien choisis pour faire comprendre la théorie des *valeurs extrêmes* des fonctions à une variable, à plusieurs variables; et lorsque ces valeurs sont assujetties à certaines conditions, on fait usage des *multiplicateurs* qu'on doit à Euler.

Le chapitre quatrième et dernier (224-471) est consacré aux applications *géométriques* et commence par de nombreux problèmes de maxima et minima (224-255), concernant la géométrie triangulaire et polygonale, les coniques (loi de réfraction) : on suit avec intérêt un calcul sur la cellule des abeilles, dont on ne connaît guère que la conformation hexagonale; tandis que c'est le fond de la cellule, le solide qui la termine, qui est la partie la moins connue et la plus merveilleuse. L'auteur cite ici cette pensée de Haüy, « que la devise familière à la nature est économie et simplicité dans les moyens, richesse et variété inépuisable dans les effets (p. 245); » ajoutons que la nature est un mot de trois syllabes : il n'y a de réel et d'admirable que l'auteur de la nature, le Δημιουργός de Platon.

Trente questions sur des maxima et minima, fort intéressantes, sur des périmètres, des aires et des volumes, forment d'instructifs exercices.

Sous le titre de : *Courbes planes*, l'auteur commence par décrire successivement les courbes transcendantes célèbres chez les anciens, la sinusoïde, la cycloïde, etc., courbes modernes, et démontre les propriétés principales des coniques.

La théorie des tangentes, normales, rayons de courbure, angles de contingence, développées et développantes, est exposée analytiquement et éclaircie géométriquement.

L'ouvrage est terminé par les formules connues relatives aux courbes à double courbure et aux surfaces courbes (430-471).

M. l'abbé Laurent déblaye les avenues de la Science. Après avoir lu son ouvrage, on étudiera avec fruit les Traités de MM. Cauchy, Duhamel, Cournot, Moigno. On doit féliciter le vénérable auteur de marcher sur les traces des Daguillon, Clavius, Mersenne, Gassendi, Lami, Boscowich, etc., et de consacrer ses loisirs à des méditations qui s'allient si bien avec des fonctions sacerdotales, et semblent les continuer; car, Dieu étant la source de toute vérité, on doit considérer les mathématiques non comme un art, non comme une science, mais comme une révélation permanente de l'intervention divine dans la structure et dans la vie des mondes.

Le lecteur aurait une idée incomplète de ce livre, si nous passions sous silence une qualité essentielle, *la perfection typographique*. La netteté du texte, la disposition bien ordonnée des calculs, la symétrie élégante des formules, charment l'œil, aident aux mouvements de l'esprit; c'est un nouveau service que la littérature mathématique doit à la maison Mallet-Bachelier. L'honorable M. Bachelier a malheureusement succombé: nous consacrerons quelques lignes à la mémoire de ce pourvoyeur de l'intelligence géométrique, qui pendant une longue carrière, aidé d'un Prote intelligent, M. Bailleul, d'habiles ouvriers, ayant toujours mis à ses produits le cachet du *beau*, est parvenu à élever une profession industrielle à la hauteur d'un art libéral. TM.

SUR LA QUADRATURE DU CERCLE.

Montucla a publié, en 1752, une histoire des *recherches sur la quadrature du cercle*. Cet ouvrage a été re-

produit avec des augmentations sous forme de Supplément au quatrième volume de l'*Histoire des Mathématiques*, du même auteur (1802), volume qui est en partie posthume, l'auteur étant mort en 1799, et qui a été continué par le célèbre astronome Lalande (*). On y lit (page 630) qu'un certain officier de cavalerie au service d'Autriche, nommé M. de Leistner, prétendit avoir trouvé la valeur *exacte*

$$\pi = \frac{3844}{1225} = \frac{62^2}{35^2}.$$

Soumise à l'examen d'une Commission impériale, cette valeur fut reconnue inexacte. Marinoni, auteur d'un ouvrage de géodésie et cité par M. Chasles (*Histoire des Méthodes*, page 446), était rapporteur. En effet, $\frac{3844}{1225} = 3,138\ldots$ Lambert, qui raconte le même fait, indique une suite de fractions s'approchant sans cesse de π, et dont les deux termes sont des carrés parfaits. On a

$$\sqrt{\pi} = 1,77245385075 = m,$$

$$\frac{2}{m} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26}}}}}}};$$

réduisant la fraction continue, on obtient, pour $\frac{m}{2}$,

$$\text{(A)} \qquad \frac{7}{8}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{31}{35}, \quad \frac{39}{44}, \quad \frac{109}{123}, \quad \frac{148}{167}, \quad \frac{3848}{4342}.$$

(*) Lalande était un astronome, et toutefois, chose aujourd'hui singulière, il a publié un Traité, en quatre volumes in-4°, d'*Astronomie*.

Carrant les doubles de ces fractions, on obtient, pour π,

$$\left(\frac{14}{8}\right)^2, \quad \left(\frac{16}{9}\right)^2, \quad \left(\frac{62}{35}\right)^2, \quad \left(\frac{178}{44}\right)^2,$$

$$\left(\frac{218}{123}\right), \quad \left(\frac{296}{167}\right)^2, \quad \left(\frac{7296}{4342}\right)^2,$$

ou

$$\frac{196}{64}, \quad \frac{256}{81}, \quad \frac{3844}{1225}, \quad \frac{6084}{1936}, \quad \frac{47524}{15129}, \quad \frac{87616}{27889}, \quad \frac{59228416}{18842964};$$

la série A exprime le côté du carré équivalent au *cercle* dont le diamètre est 1, et les fractions inverses de cette série expriment la valeur du diamètre d'un cercle dont l'aire est 1. On a, dans cette même série,

$$\frac{167}{148} = 1,1283784.$$

En calculant la valeur du diamètre pour la valeur ordinaire de π, on trouve 1,1283790; la différence n'est que de 0,0000006, de sorte que cette fraction $\frac{167}{148}$ est utile dans le jaugeage des cylindres. Lambert fait aussi cette observation curieuse :

$$\frac{\pi}{4} = 0,7853981634 = a,$$

$$\frac{1}{a} = 1 + \frac{0,2146018366}{a} = 1 + \frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{0,1415926536}{b} = 3 + \frac{c}{b},$$

$$3 + c = \pi.$$

La raison de ce fait est évidente.

Tout ce qui précède est consigné dans le tome II (première partie, p. 140; 1770) des excellents documents que Lambert a publiés de 1765 à 1772 pour l'usage des mathématiques et de leurs applications. L'article cité est

adressé à ceux qui recherchent la quadrature du cercle, et il débute ainsi :

» Je puis avoir quelques raisons de douter si la présente dissertation sera lue ou même comprise par ceux qui y devraient prendre le plus d'intérêt; je parle de ceux qui mettent leur temps et leurs soins à chercher la quadrature du cercle. Il est assez certain qu'il y aura toujours beaucoup de ces gens-là, et, si l'on doit juger de l'avenir d'après le passé, ce seront toujours des hommes qui, sachant peu de chose de la géométrie, se font une idée fausse de leur propre mérite intellectuel, et, ce qui leur manque du côté des connaissances et de l'intelligence, ils le remplacent par des sophismes qui, souvent, ne sont ni très-fins ni très-cachés. »

Lambert observe que la valeur de π est renfermée entre ces deux fractions

$$\frac{3368518494434 03}{1072232738857129}, \quad \frac{3245215400329 45}{1019514486099 14};$$

la première est trop petite; la seconde, trop grande, est plus approchée que la première : on sait, de plus, qu'entre les deux, il n'existe pas de quantité rationnelle plus approchée que la plus grande de ces fractions; donc, s'il existe un rapport rationnel pour π, ses deux termes doivent surpasser les deux termes de la seconde fraction. D'ailleurs Lambert a démontré le premier (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1761) que π et π^2 sont des quantités irrationnelles. Legendre, améliorant cette démonstration, en a fait l'objet d'une Note à la suite de sa Trigonométrie; toutefois, il est certain qu'il existe une droite égale en longueur à une circonférence donnée; mais si l'on parvient jamais à construire cette longueur, son rapport avec le diamètre correspondant et le carré de ce rapport seront incommensurables. On ne voit pas comment la géométrie,

livrée à elle-même, pourrait établir cette incommensurabilité, ainsi qu'on le fait pour le rapport du côté du carré à la diagonale et pour d'autres incommensurabilités quadratiques qui sont le sujet du dixième livre d'Euclide. D'après un récent travail du savant géomètre arabiste, M. Woepke, il paraîtrait que les Grecs connaissaient des incommensurables d'un degré plus élevé que le second.

Lorsqu'il s'est agi de l'article Lambert pour le dictionnaire Michaud, Lacroix me disait qu'il ne connaissait à Paris qu'un seul géomètre capable d'écrire cette biographie. C'était mon ami Servois, alors conservateur du Musée d'Artillerie. C'est, en effet, un morceau fait de main de maître, dans cette célèbre collection. Nous donnerons une notice biographique sur Servois, un des premiers promoteurs de la géométrie segmentaire.

RECUEIL DE FORMULES ET DE VALEURS RELATIVES AUX FONCTIONS CIRCULAIRES ET LOGARITHMIQUES (suite)

(voir t. V, p. 79, 151, 221, 349, 411).

83. $\pi = \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381}, \frac{1146408}{364913}, \frac{4272943}{1360120}, \frac{5419351}{1725033}, \frac{80143857}{25510582}, \frac{165707065}{52746197}, \frac{245850922}{78256779}, \frac{411557987}{131002976}$. (*Voir* n° 19.)

84. $\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{14}, \frac{172}{219}, \frac{355}{452}$ (rapport du cercle au carré du diamètre).

85. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \frac{11}{21}, \frac{111}{212}, \frac{122}{233}, \frac{233}{445}, \frac{355}{678}$ (rapport de la sphère au cube du diamètre).

86. $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{35}{31}, \frac{44}{39}, \frac{123}{109}, \frac{167}{148}$ (rapport du diamètre au côté du carré équivalent au cercle).

87. $\frac{2}{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}} = \frac{5}{4}, \frac{31}{25}, \frac{67}{54}, \frac{567}{457}, \frac{3469}{2796}, \frac{21381}{17233}$ (rapport du diamètre de la sphère au côté du cube équivalent à la sphère).

88. $\frac{2}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} = \frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \frac{168}{155}, \frac{349}{322}$ (rapport du diamètre d'un cylindre ayant une hauteur égale au diamètre, au côté du cube équivalent) (*).

89.
$$\sin 75^\circ - \sin 45^\circ = \sin 45^\circ,$$
$$\sin 15^\circ \,.\, \sin 75^\circ = \frac{1}{4},$$
$$\text{tang}\, 15^\circ + \text{tang}\, 60^\circ = 2,$$
$$\text{tang}\, 75^\circ - \text{tang}\, 60^\circ = 2,$$
$$\text{tang}\, 15^\circ + \text{tang}\, 75^\circ = 4,$$
$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2},$$
$$\sin 54^\circ \,.\, \sin 18^\circ = \frac{1}{4},$$
$$\text{tang}\, 18^\circ + \text{séc}\, 18^\circ = \text{tang}\, 54^\circ,$$
$$\sin 64^\circ + \sin 18^\circ = \frac{3}{4},$$
$$\cos 54^\circ + \cos 18^\circ = \frac{5}{8},$$
$$\text{séc}\, 30^\circ = \frac{4}{3} \sin 60^\circ.$$

(*) LAMBERT, tab. XXII.

LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE, SIMPLIFIÉE DANS SES FORMULES ET SES DÉMONSTRATIONS;

PAR MM. CORNÉLIUS KEOGH (*) ET V.-A. LEBESGUE.

Deux remarques très-simples, tirées d'un Mémoire inédit de M. Cornélius Keogh, permettent, l'une de simplifier les formules de la trigonométrie sphérique, l'autre d'en abréger les démonstrations.

L'application de ces deux remarques sera l'objet d'un Traité de Trigonométrie renfermant, en outre, quelques améliorations de détail.

L'objet de la présente Note est de faire connaître à l'avance les deux principes et leur application.

I.

Simplification des formules.

Elle consiste en ceci : a, b, c étant les côtés d'un triangle ABC tracé sur une sphère de rayon 1, A, B, C représentent, non les arcs de rayon 1 qui mesurent les angles proprement dits ou *intérieurs,* mais bien les arcs qui mesurent les angles *extérieurs,* suppléments des premiers.

Ainsi dans un triangle ABC, les côtés seront a, b, c; les angles extérieurs A, B, C.

Dans le triangle polaire, les côtés seront A, B, C; les angles extérieurs a, b, c.

D'une formule donnée, on en tirera toujours une autre par le changement de

$$a,\quad \sin a,\quad \cos a,\quad \sin\frac{1}{2}a,\quad \cos\frac{1}{2}a,\ldots$$

(*) Prononcez *Kiou*.

en

$$A, \quad \sin A, \quad \cos A, \quad \sin \frac{1}{2} A, \quad \cos \frac{1}{2} A, \ldots,$$

et non

$$A, \quad \sin A, \quad -\cos A, \quad \cos \frac{1}{2} A, \quad \sin \frac{1}{2} A, \ldots,$$

comme dans la méthode usuelle, qui peut altérer sensiblement la formule primitive, quand elle n'est pas très-simple.

Les deux exemples suivants montreront l'avantage de la méthode que nous proposons.

Premier exemple.

Méthode usuelle.

a, b, c sont les côtés $a + b + c = 2p$;
A, B, C sont les angles *intérieurs*.

$$A + B + C - 180^\circ = 2P.$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin p . \sin (p - a)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin (B - P) \sin (C - P)}{\sin B \sin C},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin P . \sin (A - P)}{\sin B . \sin C}.$$

On rencontre deux irrégularités : sin changé en cos; $p - c$ en C — P, etc.

Méthode proposée.

a, b, c sont les côtés $a + b + c = 2p$;
A, B, C sont les angles *extérieurs*.

$$A + B + C = 2P.$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin p . \sin(p-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin(P-B)\sin(P-C)}{\sin B \sin C},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin p . \sin(P-A)}{\sin B \sin C}.$$

Les irrégularités signalées ont disparu.

On tire de ces formules

$$\sin^2 A \sin^2 b . \sin^2 c = 4 . \sin p . \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c);$$

il est à remarquer que $\sin A \sin b \sin c$ est le volume du parallélipipède dont trois côtés contigus et égaux sont OA, OB, OC, en supposant que O est le centre de la sphère, et A, B, C les sommets du triangle sphérique. C'est le *rhomboèdre normal* (C. Keogh).

Il résulte de là, ces équations

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

$$= \frac{2\sqrt{\sin p . \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a \sin b \sin c},$$

qui serviront plus loin.

Il est bon de remarquer que les valeurs de $\sin^2 \frac{1}{2} A$, $\cos^2 \frac{1}{2} A$ se tirent presque immédiatement du théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit; ces formules pourraient être regardées comme fondamentales, d'autant plus qu'elles donnent

$$\cos^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2} A = \cos A = \frac{\cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Carnot a déjà remarqué que toute la trigonométrie rectiligne se tire du théorème de Ptolémée (*). Il en serait de même de la trigonométrie sphérique.

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Formules de Delambre.*

Méthode usuelle.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

On trouve ici le rapport de sin à cos; et, réciproquement, le rapport de cos à sin.

Méthode proposée.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

(*) Ptolémée lui-même fonde toute sa trigonométrie sur ce théorème.

TM.

$$-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Toujours ici rapport de sin à sin ou de cos à cos.

L'apparition du signe — ne rend en rien les applications moins faciles.

ANALOGIES DE NÉPER.

Méthode usuelle.

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A+B)=\cot\,\frac{1}{2}C.\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A+B)=\cot\,\frac{1}{2}C.\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+b)=\text{tang}\,\frac{1}{2}c.\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b)=\text{tang}\,\frac{1}{2}c.\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Il y a ici un changement de cot en tang.

Méthode proposée.

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}C.\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}C.\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c.\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c.\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Ici les tangentes se présentent toujours; le passage au triangle polaire est mieux marqué, de même que dans les formules de Delambre.

L'article suivant montre un autre avantage de la nouvelle notation.

II.

Simplification des démonstrations.

Elle repose sur ce principe : Prolongez deux des côtés, b, c par exemple, au-dessous du côté a pris pour base, et vous compléterez un fuseau; les deux triangles ABC, A'BC auront un côté commun $BC = a$.

Les angles opposés intérieurs ou extérieurs seront égaux $A = A'$.

De plus, les quatre autres parties du second triangle seront

$$\pi-b,\quad \pi-c,\quad \pi-B,\quad \pi-C.$$

Celles du premier étant

$$b,\quad c,\quad B,\quad C,$$

pour cette raison les deux triangles seront nommés *supplémentaires adjacents* par le côté a.

Tout triangle a trois triangles supplémentaires adjacents par les côtés a, b, c, respectivement.

Ainsi, dans certains cas, une formule en donnera trois autres en passant aux triangles supplémentaires, on en aurait huit si l'on employait simultanément les triangles supplémentaires et les triangles polaires. De là un moyen d'abréger les démonstrations en employant des combinaisons d'équations appropriées à la recherche (*).

Il est bien facile de voir que la première analogie de Néper donne la seconde en passant au triangle supplémentaire, puis la considération des triangles polaires donne les deux autres.

Pour les formules de Delambre, la première donne la quatrième de deux manières, par le passage au triangle polaire et le passage au triangle supplémentaire. Les deuxième et troisième ne changent pas quand on passe au triangle polaire; mais l'une vient de l'autre par le passage au triangle supplémentaire.

Surface du triangle.

Si l'on représente par S la surface d'un triangle où les angles extérieurs sont A, B, C, et par S_a, S_b, S_c les surfaces des triangles supplémentaires adjacents par les côtés a, b, c, on trouvera sans difficulté

$$\begin{aligned} S &= 2\pi - (A + B + C), \\ S_a &= \quad - A + B + C, \\ S_b &= \quad A - B + C, \\ S_c &= \quad A + B - C; \end{aligned}$$

(*) C'est précisément ce que fait Viète (*Opera mathematica*, page 421; édit. de Schooten). TM.

d'où

$$\sin\frac{1}{2}S = \sin\frac{1}{2}(A+B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_a = \sin\frac{1}{2}(-A+B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_b = \sin\frac{1}{2}(A-B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_c = \sin\frac{1}{2}(A+B-C).$$

Il suit de là, par développement,

$$\sin\frac{1}{2}S = \sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C$$
$$+\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C;$$

d'où, par substitution,

$$\sin\frac{1}{2}S = \frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)+(p-c)-\sin p}{\sin a \sin b \sin c}$$
$$\times\sqrt{\sin p.\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

qui se réduit à

$$\sin\frac{1}{2}S = \frac{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\sin C = \sin\frac{1}{2}(A+B+C);$$

de là

$$\sin\frac{1}{2}S_a = \frac{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}\sin C = \sin\frac{1}{2}(-A+B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_b = \frac{\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}\sin C = \sin\frac{1}{2}(A-B+C),$$

$$\sin \frac{1}{2} S_c = \frac{\cos \frac{1}{2} a . \cos \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c} \sin C = \sin \frac{1}{2} (A + B - C).$$

La première et la quatrième donnent, par addition, les deux premières formules de Delambre. La deuxième et la troisième donnent de même les deux autres.

Les formules de Delambre donnent, par division, les analogies de Néper.

Ces exemples paraissent justifier nos deux assertions : la simplification des formules, celle des démonstrations. Un travail plus étendu le montrera mieux encore.

MNÉMOTECHNIE TRIGONOMÉTRICO-SPHÉRIQUE

(voir t. X, p. 134).

Écrivons les six éléments d'un triangle, selon qu'ils se suivent dans le triangle, en commençant par un côté $a\mathrm{B}c\ \mathrm{A}b\mathrm{C}$; prenons quatre de ces éléments en commençant par un côté, par exemple $a\mathrm{B}c\mathrm{A}$: le rapport des cotangentes des *côtés* (commençant par le côté extrême a) divisé par le cosinus de l'angle compris, moins le rapport des cotangentes des *angles* (commençant par A), divisé par le cosinus du côté compris, est égal à l'unité; de sorte qu'on a

$$\frac{\cot a}{\cot c} \cdot \frac{1}{\cos B} - \frac{\cot A}{\cot B} \cdot \frac{1}{\cos c} = 1.$$

C'est la formule (71) (*voir* t. V, p. 412) qui en donne cinq autres.

Ce moyen mnémonique a été indiqué par M. Chasles, dans son cours à l'École Polytechnique.

Formules de Delambre.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}, \quad \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}, \quad \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

1°. Les numérateurs des premiers membres sont formés des sinus et des cosinus des arcs $\frac{1}{2}(A+B)$ et $\frac{1}{2}(A-B)$; les dénominateurs, de ceux de $\frac{1}{2}(a+b)$ et $\frac{1}{2}(a-b)$.

2°. $+B$ au numérateur est toujours accompagné de cos au dénominateur, et $-B$ est accompagné de sinus; de même, cos au numérateur détermine $+b$ au dénominateur, et sinus $-b$; ce qui permet d'écrire immédiatement les premiers membres, en commençant soit par le numérateur, soit par le dénominateur.

3°. Les arcs des seconds membres sont $\frac{1}{2}C$ et $\frac{1}{2}c$ Les dénominateurs dans chaque équation sont toujours formés de lignes de même nom, et les numérateurs de lignes de noms différents.

Analogies de Néper.

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}, \quad \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}, \quad \frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Il n'est pas plus difficile de se faire une loi pour écrire ces formules. On observera que le signe du second terme de l'arc au numérateur détermine le nom de la ligne du dénominateur dans les premiers membres, comme précédemment.

Les numérateurs, dans les deux dernières équations, sont des lignes de même nom.

Note. Ces indications mémoratives sont de M. Ch. Forestier, professeur au lycée de Metz.

GRAND CONCOURS DE 1853

(voir t. XI, p. 305).

Historique.

Ce concours présente un événement auquel, dans l'intérêt de l'Université, on ne saurait donner trop de publicité. Sur la représentation des professeurs présents aux concours, la question proposée aux élèves en mathématiques supérieures a dû être retirée, parce qu'elle renfermait une omission grave et des erreurs qui rendaient la solution impossible. Voici l'énoncé :

« Déterminer les systèmes des valeurs de u, x, y, z, satisfaisant aux équations

$$(u-a)x + by + cz = 0,$$
$$bx + (u-b')y + c'z = 0,$$
$$cx + c'y + c''z = 0;$$

a, b, c, b', c', c'' sont des coefficients numériques; *les trois derniers sont positifs*. Former l'équation $f(u) = 0$ dont dépendent les valeurs de u, u_1 étant une des valeurs de u, et x_1, y_1, z_1 les valeurs correspondantes de x, y, z, u_2 étant une seconde valeur de u, et x_2, y_2, z_2 les valeurs correspondantes de x, y, z; prouver qu'on a entre ces

quantités la relation

$$(u_2 - u_1)\,(x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1) = 0,$$

et que cette relation est incompatible avec des valeurs imaginaires de u. Considérons le cas particulier où l'on a

$$a = 0,\quad b' = 1,\quad c'' = 2,\quad b = 1,\quad c = 1,\quad c' = 1;$$

et déterminer avec cinq figures *la valeur de u* supérieure à l'unité et les valeurs correspondantes de x, y, z. »

On reconnaît de suite que c'est le système d'équations qui servent à déterminer la position des plans diamétraux principaux dans les surfaces du second degré, ou encore les axes principaux de rotation d'un corps. Les trois équations suffisent, en effet, pour trouver l'équation $f(u) = 0$ du troisième degré; mais les équations étant homogènes en x, y, z, ne suffisent pas pour faire connaître ces inconnues au moyen des trois valeurs de u; il faut une quatrième équation quelconque entre ces trois inconnues, quatrième équation qu'on a oublié de donner, ou qu'on n'a pas cru devoir donner, pour déguiser la source; mais, ainsi formulé, le problème devenait indéterminé. L'auteur de la question a évidemment copié ce qu'on trouve dans les livres pour les diamètres principaux, et il a laissé de côté l'équation indispensable $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; ensuite pourquoi faut-il que les coefficients b', c', c'' soient positifs? Il est vrai que, dans le problème de rotation, trois de ces coefficients représentent des moments d'inertie; mais dans le cas général, les coefficients peuvent avoir des signes quelconques. On dit de chercher *la valeur de u* supérieure à l'unité; cela ferait croire qu'il n'existe qu'une seule telle valeur: or, l'équation en u est $u^3 - 3u^2 - u + 5 = 0$ qui a une racine comprise entre 1 et 2 et une seconde entre 2 et 3. Abstraction même faite de ces étrangetés, la question était déplacée, puisqu'elle fait partie du cours clas-

sique, et qu'elle est résolue dans une foule d'ouvrages, entre autres dans les *Nouvelles Annales* (t. V, p. 82). Il suffit d'y remplacer respectivement α, β, γ, δ, ε, θ par a, b', c'', $-b$, $-c'$, $-c$, dans les équations (8) pour trouver le même système d'équations.

Un des élèves concurrents m'a fait savoir, qu'après avoir laissé travailler les élèves pendant une demi-heure, M. Sonnet, inspecteur d'Académie, vint dire qu'on retirait la question, parce que M. Bouquet avait déclaré qu'il avait donné cette question à ses élèves; déclaration qui fait beaucoup d'honneur à ce professeur, connu par notre meilleur *Traité de Géométrie analytique*, qu'il a publié avec son ami et collègue M. Briot, et où l'on trouve en effet la solution complète (p. 304, 2e édit.; 1851).

Obligé de renoncer à cette question, on en a adopté une autre d'ordre primaire et d'une insignifiance triviale, lorsqu'il s'agit d'un concours dit GRAND et de mathématiques dites SUPÉRIEURES.

Je reviens à mon éternel thème : Lorsqu'on fait concourir solennellement des élèves en musique, on désigne, pour donner le sujet des compositions et pour les juger, les Adam, les Auber, les Halévy, enfin les grands maîtres de l'art. Pourquoi ne fait-on pas de même pour des élèves en mathématiques? Pourquoi n'avoir pas recours aux grands mathématiciens?

Pour mériter ce titre, il faut avoir fait des travaux sérieux de géométrie pure, ou d'analyse pure, ou de mécanique pure, être de ces hommes qui font la gloire de notre Académie des Sciences; c'est parmi eux qu'il faut *choisir*, ayant égard à la valeur intrinsèque et non à la valeur de position. Les hommes ne sont pas des chiffres.

Dans la première Université impériale, époque de brillants concours, on consultait un Legendre, et aujourd'hui!!! Êtes-vous encore étonnés de la différence des ré-

sultats? Il y aurait une mesure essentielle à prendre ; c'est de publier chaque année les noms des auteurs des questions et de ceux qui les jugent. Chacun doit être responsable de ses œuvres, et les exposer au grand jour. On n'a pas besoin de se cacher pour bien faire, et on ne doit pas permettre de se cacher pour mal faire.

Rappelons-nous que le lauréat du grand concours de mathématiques supérieures est exempt du service militaire et presque certain d'être admis à l'École Polytechnique ; par conséquent, on ne saurait prendre trop de précautions pour sauvegarder la bonté et la justice de l'opération.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Donner une définition géométrique de la parabole, et, partant de cette définition, exposer géométriquement les diverses propriétés de la courbe.

Observation. Il y a des définitions en foule, des propriétés par milliers; dans quelle balance les placerez-vous pour en peser les mérites relatifs? Hélas!

CLASSE DE LOGIQUE.

SECTION DES SCIENCES (*).

Première question.

Étant donnés dans un même plan deux polygones semblables, trouver dans ce plan un point tel, que les droites menées de ce point à deux sommets homologues quelconques, fassent entre elles un angle constant.

Observation. Mauvaise rédaction! Il fallait dire : Démontrer qu'il existe dans le plan, etc., et, ensuite, construire ce point.

Cette question se rattache aux beaux travaux de

(*) Autrefois Mathématiques élémentaires. C'était clair!

M. Chasles sur les centres de rotation, et a été résolue, en 1844, avec beaucoup de détails, par M. Midy (*Nouvelles Annales,* t. III, p. 77).

Deuxième question.

On donne deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′, tels, que les droites AA′, BB′, CC′, DD′, qui joignent deux à deux les sommets correspondants, concourent en un même point.

Démontrer que si les faces correspondantes se coupent, les quatre droites d'intersection sont situées dans un même plan.

Observation. Bonne question, assez facile. Le théorème subsiste pour des faces correspondantes parallèles. Ces restrictions donnent aux élèves des idées étroites (*).

CLASSE DE TROISIÈME (SCIENCES).

COMPOSITION EN MATHÉMATIQUES.

Première question.

Un terrain dont la forme est celle d'un hexagone régulier, a une superficie de 34 ares 19 centiares : on demande de calculer le contour de ce terrain.

Deuxième question.

Étant donnés sur une carte quatre points non en ligne droite, tracer sur cette carte une route circulaire qui passe à égale distance de chacun de ces points.

Observation. Très-bonne question, supérieure à celle des mathématiques supérieures. Tm.

(*) Nous ne connaissons pas les questions mathématiques de la Section des Lettres.

RÉSOLUTION DE LA QUESTION 263

(voir t. XI, p. 401);

Par M. Philippe KORALEK,
Employé au Ministère de l'Intérieur (Statistique).

L'équation

$$3432x^7 - 12012x^6 + 16632x^5 - 11550x^4 + 4200x^3 - 756x^2 + 56x - 1 = 0$$

étant donnée, trouver les racines avec 7 décimales exactes.

(Gauss.)

Solution. On a

$$f(0) = -1, \qquad f(0,1) = +0,2396512,$$
$$f(0,2) = -0,3225984, \quad f(0,3) = +0,0145904,$$
$$f(0,4) = +0,2935168, \quad f(0,5) = 0,$$
$$f(0,6) = -0,2935168, \quad f(0,7) = -0,0145904,$$
$$f(0,8) = +0,3225984, \quad f(0,9) = -0,2396512,$$
$$f(1) = +1.$$

En désignant les sept racines de l'équation par

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5,\quad x_6,\quad x_7,$$

on voit que la racine

x_1	est comprise entre		0 et 0,1,
x_2	»	»	0,1 et 0,2,
x_3	»	»	0,2 et 0,3,
x_4	»	»	0,5,
x_5	»	»	0,7 et 0,8,
x_6	»	»	0,8 et 0,9,
x_7	»	»	0,9 et 1.

Recherche de la première racine, comprise entre 0 et 0,1.

On trouve

$$f(0,08) = +0,3703352, \quad f(0,06) = +0,408296,$$
$$f(0,04) = +0,2712864, \quad f(0,03) = +0,10404,$$
$$f(0,025) = -0,0112272.$$

Ces substitutions prouvent que la racine est plus grande que 0,025 et plus petite que 0,03.

En appliquant la règle de la fausse position (la méthode la plus précieuse dans la pratique), on a la formule

$$w_1 = s_2 - \frac{f_2(s_1 - s_2)}{f_1 - f_2},$$

où f_1 et f_2 sont les résultats des substitutions s_1 et s_2, et w_1 la première valeur approximative de la racine.

Donc, en mettant

$$s_1 = 0,025, \quad s_2 = 0,03,$$

il vient

$$f_1 = -0,0112272, \quad f_2 = +0,10404,$$

et

$$w_1 = 0,02547;$$

par les substitutions de w_1 et s_1, il vient

$$f(w_1) = +0,0005976, \quad f_1 = -0,0112272,$$

et

$$w_2 = 0,0254462.$$

Par les substitutions de w_1 et w_2, il vient

$$f(w_1) = +0,0005976, \quad f(w_2) = 0,00000507,$$

et

$$w_3 \quad \text{ou} \quad x_1 = 0,0254462.$$

Deuxième racine.

En opérant de même pour la seconde racine, il vient

$$\omega_1 = 0,14; \quad f(0,14) = -0,0821661,$$

$$f(0,13) = -0,0060871, \quad f(0,1292) = +0,0002743,$$

et

$$x_2 = 0,1292345;$$

le 5 est trop fort.

Troisième racine.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,295, & f(\omega_1) &= -0,0104236, \\ \omega_2 &= 0,29708, & f(\omega_2) &= +0,0000129, \\ \omega_3 &= 0,29707743, \end{aligned}$$

et

$$x_3 = 0,2970774.$$

Quatrième racine.

$$x_4 = 0,5.$$

Cinquième racine.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,7043, & f(\omega_1) &= +0,0069088, \\ \omega_2 &= 0,70292, & f(\omega_2) &= -0,0000128, \\ \omega_3 &= 0,702922552, \end{aligned}$$

et

$$x_5 = 0,7029226;$$

le chiffre 6 est trop fort.

Sixième racine.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,8574, & f(\omega_1) &= +0,1007147, \\ \omega_2 &= 0,87000, & f(\omega_2) &= +0,0060946, \\ \omega_3 &= 0,87074, & f(\omega_3) &= +0,0002041, \\ \omega_4 &= 0,8707656, \end{aligned}$$

et

$$x_6 = 0,8707656;$$

le chiffre 6 est trop faible.

Septième racine.

Le calcul offre quelques difficultés, puisque $f(x)$ varie moins sensiblement entre 0,9 et 0,1 qu'entre 0,1 et 0,2, etc., circonstance qui nous obligeait de calculer d'abord $f(0{,}92)$, $f(0{,}94)$, $f(0{,}96)$, $f(0{,}98)$. La connaissance de toutes ces valeurs n'est pas nécessaire; mais comme l'application du principe de la règle de fausse position nous prescrit de les calculer, nous indiquons leurs valeurs. On a

$$f(0,92) = -0,3703349, \quad f(0,94) = -0,40929369,$$
$$f(0,96) = -0,2712865, \quad f(0,98) = 0,150555.$$

Ces deux dernières valeurs donnent :

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,973, & f(0,973) &= -0,0318033, \\ w_2 &= 0,9743, & f(0,9743) &= -0,0063073, \\ w_3 &= 0,97463, & f(w_3) &= +0,0019014, \\ w_4 &= 0,9745536, \end{aligned}$$

et

$$x_7 = 0,9745536.$$

Récapitulation.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,0254462, \\ x_2 &= 0,1292345, \\ x_3 &= 0,2970774, \\ x_4 &= 0,5, \\ x_5 &= 0,7029226, \\ x_6 &= 0,8707656, \\ x_7 &= 0,9745536. \end{aligned}$$

Vérification.

1°. La somme des 7 racines est $= 3,4999999$.

En divisant le coefficient du second terme par celui du premier, il vient

$$-12012 : 3432 = -3,5 \quad \text{(quotient exact)}.$$

Ainsi la somme de 7 racines est exacte à une unité décimale du huitième ordre près.

2°. Le produit des racines est

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7.$$

On a

$$x_1 x_2 = 0,00328854, \quad x_1 x_2 x_3 = 0,000976912,$$
$$x_1 x_2 x_3 x_5 = 0,0006867146, \quad x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 = 0,00059796744,$$
$$x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 = 0,00058275131\,;$$

enfin

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 = 0,000291375.$$

En divisant le dernier terme par le coefficient du premier, on obtient la fraction périodique mixte

$$-1 : 3432 = -0,000291375,$$

exactitude surprenante.

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX TANGENTES;

PAR M. T. JOACHIMSTHAL (*).

La formule dont je vais donner la démonstration est la suivante :

$$1 - \frac{\operatorname{tang} mx}{\operatorname{tang} x} + \frac{\operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-1)x}{\operatorname{tang} x . \operatorname{tang} 2x} - \ldots$$
$$= (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-1)x \ldots \operatorname{tang} x, \quad \text{pour } m \text{ pair};$$
$$= 0, \quad \text{pour } m \text{ impair}.$$

(*) Maintenant professeur à l'Université de Halle.

On la démontre par une méthode dont M. Gauss s'est servi pour deux séries bien connues, d'une forme semblable.

En désignant

$$\frac{\operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-1)x \ldots \operatorname{tang}(m-\mu+1)x}{\operatorname{tang} x . \operatorname{tang} 2x \ldots \operatorname{tang} \mu x} = (m, \mu),$$

on aura

$$(1) \qquad (m, \mu) \operatorname{tang}(m-\mu)x = (m-1, \mu) \operatorname{tang} mx,$$

$$(2) \quad \begin{cases} (m, \mu+1) = (m, \mu) \dfrac{\operatorname{tang}(m-\mu)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x}, \\ (m-1, \mu+1) = (m-1, \mu) \dfrac{\operatorname{tang}(m-\mu-1)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x}. \end{cases}$$

Il suit de là

$$\begin{aligned} &(m, \mu+1) - (m-1, \mu+1) \\ &= \frac{(m, \mu) \operatorname{tang}(m-\mu)x - (m-1, \mu) \operatorname{tang}(m-\mu-1)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x} \\ &= (m-1, \mu) \frac{\operatorname{tang} mx - \operatorname{tang}(m-\mu-1)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x} \\ &= (m-1, \mu)[1 + \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-\mu-1)x], \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (m-1, \mu) = {} & (m-1, \mu+1) + (m-1, \mu) \\ & + (m-1, \mu) \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-\mu-1)x. \end{aligned}$$

A l'aide de cette formule on peut décomposer les termes de la série

$$1 - (m, 1) + (m, 2) - \ldots = f(m),$$

comme il suit :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -(m, 1) &= -(m-1, 1) - 1 - \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x, \\ (m, 2) &= \quad (m-1, 2) + (m-1, 1) \\ &\quad + \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-2)x . (m-1, 1), \end{aligned}$$

$$-(m, 3) = -(m-1, 3) - (m-1, 2)$$
$$- \operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-3)x.(m-1, 2),$$

. . . .

$$\varepsilon(m, m-1) = \varepsilon(m-1, m-1) + \varepsilon(m-1, m-2)$$
$$+ \varepsilon \operatorname{tang} mx \operatorname{tang} x.(m-1, m-2),$$
$$-\varepsilon(m, m) = -\varepsilon(m-1, m-1),$$
$$\varepsilon = (-1)^{m-1}.$$

En additionnant ces équations, on trouve

$$f(m) = -\operatorname{tang} mx \left[\begin{array}{l} \quad \operatorname{tang}(m-1)x \\ -(m-1, 1)\operatorname{tang}(m-2)x \\ +(m-1, 2)\operatorname{tang}(m-3)x \\ -\ldots+\varepsilon(m-1, m-2)\operatorname{tang} x \end{array}\right];$$

mais, en vertu de la relation (1), on a

$$(m-1, 1)\operatorname{tang}(m-2)x = (m-2, 1)\operatorname{tang}(m-1)x,$$
$$(m-1, 2)\operatorname{tang}(m-3)x = (m-2, 2)\operatorname{tang}(m-1)x,$$
etc.,

donc

$$f(m) = -\operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x[1-(m-2,1)+(m-2,2)-\ldots],$$

et, par suite,

$$(3) \qquad f(m) = -\operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x f(m-2),$$

ou bien, par un calcul bien simple,

$$(4) \quad \left\{\begin{array}{l} f(m) = (-1)^n \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x\ldots \\ \operatorname{tang}(m-2n+1)x\, f(m-2n); \quad m > 2n. \end{array}\right.$$

En remarquant qu'on a

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0,$$

on parvient à l'équation

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l} f(m) = (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x\ldots\operatorname{tang} x, \\ \qquad\qquad \text{pour } m \text{ pair}, \\ \qquad = 0, \text{ pour } m \text{ impair}; \end{array}\right.$$

ce qu'il fallait démontrer.

M. Heine (*), auquel j'avais communiqué ces résultats, m'en a donné une démonstration analogue à celle qu'il a publiée pour les deux séries de M. Gauss. (CRELLE, *Journal de Mathématiques,* tome XXXIX, p. 288; 1850.)

Il prend pour point de départ les équations

$$\frac{(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\ldots}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots} = 1 + \frac{1+q}{1-q}x + \frac{(1+q)(1+q^2)}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \ldots,$$

$$\frac{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\ldots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\ldots} = 1 - \frac{1+q}{1-q}x + \frac{(1+q)(1+q^2)}{(1-q)(1-q^2)}x^2 - \ldots.$$

En les multipliant, on obtient

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \frac{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^m)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}$$

$$\times\left(1 - \frac{1+q}{1-q}\,\frac{1-q^m}{1+q^m} + \frac{1+q}{1-q}\,\frac{1+q^2}{1-q^2}\,\frac{1-q^m}{1+q^m}\cdot\frac{1-q^{m-1}}{1+q^{m-1}}\ldots\right),$$

donc

$$1 - \frac{1+q}{1-q}\,\frac{1-q^m}{1+q^m} + \frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1+q^2}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^m}{1+q^m}\cdot\frac{1-q^{m-1}}{1+q^{m-1}} - \ldots = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^m)}, \text{ pour } m \text{ pair},$$

$$= 0, \text{ pour } m \text{ impair};$$

ce qui coïncide avec l'équation (5).

QUESTIONS.

279. ABC est un triangle donné; F un point *fixe* dans le plan du triangle; une droite *variable* AD passe par A et rencontre la base BC en D, point *variable*. Construi-

(*) Savant géomètre de l'Université de Bonn.

sons une conique ayant pour foyer le point F et touchant les trois côtés du triangle ABD; soit E le point de contact sur AD; et encore une seconde conique de même foyer F et touchant les trois côtés du triangle ACD; soit E′ le point de contact sur AD; l'angle EFE′ est constant. (STUBBS.)

280. Une courbe du troisième ordre étant composée d'une branche infinie et d'une ovale, si l'on prend sur la branche infinie trois points en ligne droite et que par chacun de ces points on mène deux tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point. Lorsque la branche infinie devient une droite, l'ovale se change en conique et l'on revient au théorème de la Hire. (CHASLES.)

281. Par un point donné dans un plan, mener dans l'espace trois droites rectangulaires, de telle sorte qu'en prenant sur ces droites, à partir du point donné, des longueurs égales, les projections de ces longueurs sur le plan soient dans des rapports donnés.

Ces axes, ainsi déterminés, tournant autour d'une droite fixe passant par le point donné, trouver les projections de ces axes après une rotation donnée.

RÈGLE A CALCULS MODIFIÉE;

PAR M. A. MANNHEIM,
Sous-lieutenant d'artillerie, ancien élève de l'École Polytechnique (*).

Insister sur l'utilité de cette règle serait chose inutile auprès des personnes qui ne s'en servent pas, et chose superflue pour celles qui en font un usage continuel et y acquièrent une habileté facilitant singulièrement les

(*) Se vend chez Gravet-Lenoir, rue Cassette, n° 14; Paris.

calculs dont on a besoin dans le monde industriel. Sous ce point de vue, l'instrument mérite de devenir de plus en plus populaire, et l'on ne saurait trop encourager ceux qui veulent bien mettre leur sagacité à le perfectionner; nous croyons que les nouvelles modifications, ingénieuses, commodes, multiplient et facilitent les applications. Nous avons déjà expliqué la théorie de la règle à calculer [tome X, page 318; 1851 (*)].

Voici en peu de mots les modifications et le but de chacune d'elles.

L'échelle inférieure de la réglette, qui était dans les anciennes règles la même que les échelles supérieures, a été remplacée par une échelle identique à celle des racines carrées.

Cette échelle et l'échelle des racines carrées sont employées pour trouver les produits et les quotients. On obtient, par cette modification, une approximation double de ce que l'on obtenait avec l'ancienne règle.

La coulisse est telle, que l'on puisse retourner la réglette.

Ceci permet de faire les calculs où il entre des lignes trigonométriques comme les calculs des nombres.

Dans l'ancienne règle, on ne pouvait effectuer certains produits, tels que $3 \sin 1^\circ$; pour obvier à cet inconvénient, on a placé deux amorces correspondant à $\frac{1}{\sin 1'}$, $\frac{1}{\sin 1''}$.

L'ouverture placée derrière la règle permet de mieux lire les logarithmes.

L'échelle placée sur le biseau ne commence plus à l'extrémité de la règle.

(*) M. P.-M.-N. Benoît, ingénieur civil, vient de publier sur la théorie et les usages de cette règle un volume in-12 de 574 pages. A ce compte, combien faudra-t-il de milliers de pages pour décrire la machine à calculer de M. Babbage? *La Règle à calcul expliquée*, par M. Benoît, est en vente chez *Mallet-Bachelier*, libraire. Prix : 6 francs.

L'usure du bois ne permettait plus, au bout de peu de temps, de se servir du premier trait de cette échelle.

Le curseur évite plusieurs lectures dans les calculs; l'erreur de lecture, qui est la plus grande, est alors diminuée.

Ces diverses modifications apportent encore d'autres avantages que l'usage fait connaître.

Une Instruction, qu'on distribue avec l'instrument, ne laisse rien à désirer sur son emploi. Cette Instruction a été imprimée à Metz, décembre 1851.

NOUVELLE MÉTHODE

Pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque;

Par M. SYLVESTER (J.-J.),

Membre de la Société royale de Londres.

1. *Lemme.* Soient

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ldots,\ C_{r-1},\ C_r$$

une suite de quantités positives, assujetties à cette loi

$$C_1 = \mu_1,\quad C_2 = \mu_2 + \frac{1}{\mu_1},\ldots,\quad C_3 = \mu_3 + \frac{1}{\mu_2},\ldots,$$

$$C_i = \mu_i + \frac{1}{\mu_{i-1}},\ldots,\quad C_r = \mu_r,$$

où les μ sont des quantités positives quelconques.

Si, dans la fraction continue

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots + \frac{1}{q_{r-1}} + \frac{1}{q_r} \quad (*)$$

(*) C'est ainsi que les Anglais écrivent la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \text{etc.}}},$$

(les quantités q_1, q_2,... étant des quantités positives ou négatives), on a les inégalités

$$[q_1] > C_1, \quad [q_2] > C_2, \quad [q_3] > C_3, \ldots, \quad [q_{r-1}] > C_{r-1}, \quad [q_r] > C_r$$

(les crochets indiquent la racine carrée positive du carré de la quantité que ces crochets renferment); le dénominateur de la fraction continue aura même signe que le produit $q_1 q_2 q_3 \ldots q_{r-1} q_r$.

Démonstration. Posons

$$q_1 = m_1,$$

$$q_2 + \frac{1}{m_1} = m_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_i + \frac{1}{m_{i-1}} = m_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_r + \frac{1}{m_{r-1}} = m_r;$$

il est aisé de vérifier que les dénominateurs successifs de la fraction continue sont

$$m_1;\ m_1 m_2;\ m_1 m_2 m_3; \ldots,\ m_1 m_2 m_3 \ldots m_{r-1} m_r;$$

m_1 a même signe que q_1 :

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{[q_1]} < \frac{1}{\mu_1}, \quad \frac{1}{m_1} < \frac{1}{\mu_1}, \quad [q_2] > \frac{1}{\mu_1}, \quad [q_2] > \frac{1}{m_1} \text{ etc.};$$

donc q_2 a même signe que m_2, et aussi $m_1 m_2$ est de même signe que $q_1 q_2$:

$$m_2 > \mu_2 + \frac{1}{\mu_1}, \quad m_2 > \mu_2, \quad \frac{1}{m_2} < \frac{1}{\mu_2}, \quad [q_3] > \frac{1}{\mu_2};$$

donc q_3 a même signe que m_3; ainsi $m_1 m_2 m_3$ est de même signe que $q_1 q_2 q_3$, et, en continuant, on parvient à démontrer que $m_1 m_2 m_3 \ldots m_{r-1} m_r$, c'est-à-dire le déno-

minateur de la fraction continue, est de même signe que le produit $q_1 q_2 q_3 \ldots q_{r-1} q_r$.

2. Théorème. *Si $f(x)$ est une fonction algébrique entière de degré n, et si l'on prend arbitrairement une autre $\varphi(x)$ algébrique et entière, et d'un degré moindre que n, et qu'on développe la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ en fraction continue*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{X_1 +} \frac{1}{X_2 +} \cdots \frac{1}{+ X_{r-1} +} \frac{1}{X_r},$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont des fonctions rationnelles de x, et si l'on forme l'équation

$$(\theta)\quad X = (X_1^2 - C_1^2)(X_2^2 - C_2^2)\ldots(X_{r-1}^2 - C_{r-1}^2)(X_r^2 - C_r^2) = 0,$$

la racine réelle supérieure de cette équation sera plus grande, et la racine réelle inférieure de cette équation sera moindre qu'aucune des racines réelles de l'équation

$$f(x) = 0;$$

et si toutes les racines de l'équation (θ) sont imaginaires, l'équation

$$f(x) = 0$$

aura aussi toutes ses racines imaginaires.

Démonstration. Tous les quotients de la fraction continue qui suivent le premier quotient, savoir : $X_2, X_3, \ldots, X_r$, sont *en général* des fonctions linéaires de x, et X_1 sera aussi linéaire, si $\varphi(x)$ est de degré $n - 1$; les cas particuliers ne changent pas la marche de la démonstration; mais il faut remarquer que lorsque $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont des racines communes, le dernier quotient aura la forme $\frac{[\chi]}{0}$, $[\chi]$ étant l'avant-dernier terme, et alors, dans l'équation (θ), au lieu de $X_r^2 - C_r^2$, on écrit simplement X_r^2.

Soient L la plus grande racine et Λ la plus petite racine de l'équation (θ); alors aucun facteur de (θ) ne peut devenir nul pour des valeurs de x comprises entre $+\infty$ et L, et entre Λ et $-\infty$; donc on aura toujours

$$[X_1] > C_1,$$
$$[X_2] > C_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[X_{r-1}] > C_{r-1},$$
$$[X_r] > C_r.$$

Or $f(x)$ est évidemment égal au dénominateur de la fraction continue multiplié par un facteur constant. Donc, en vertu du lemme, le dénominateur de la fraction continue est de même signe que le produit $X_1 X_2 X_3 \ldots X_{r-1} X_r$ pour les valeurs de x comprises entre $+\infty$ et L, et entre Λ et $-\infty$; mais dans ces intervalles la fonction générale X_i n'étant pas comprise entre $+C_i$ et $-C_i$ ne peut devenir nulle, et, par conséquent, ne peut changer de signe; donc le dénominateur de la fraction continue conserve le même signe pour toute valeur de x renfermée entre ces intervalles, et de même $f(x)$; L est donc une limite supérieure et Λ une limite inférieure des racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Le nombre des racines réelles de l'équation (θ) est évidemment pair, zéro compris; dans ce dernier cas, c'est-à-dire (θ) n'ayant aucune racine réelle, $f(x)$ ne changera donc pas de signe pour des valeurs de x comprises entre $+\infty$ et $-\infty$; autrement toutes les racines de $f(x) = 0$ sont imaginaires. Le théorème est donc complétement démontré.

3. Si $\varphi(x)$ est de degré $n-1$, la fraction continue renferme *en général* (sauf les cas où quelques-uns des coefficients deviennent nuls), comme il a été dit plus haut,

n quotients linéaires de la forme

$$a_1 x - b_1,\quad a_2 x - b_2, \ldots,\quad a_{n-1} x - b_{n-1},\quad a_n x - b_n;$$

donc, d'après le théorème, la plus grande et la plus petite des $2n$ quantités

$$\frac{b_1 \pm C_1}{a_1},\quad \frac{b_2 \pm C_2}{a_2}, \ldots,\quad \frac{b_{n-1} \pm C_{n-1}}{a_{n-1}},\quad \frac{b_n \pm C_n}{a_n},$$

sont respectivement une limite supérieure et une limite inférieure des racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Si l'on prend

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{r-1} = 1,$$

on vient au théorème énoncé (page 286).

4. Lors même que les quotients X_1, X_2, etc., ne sont pas linéaires, on n'aura pourtant jamais à résoudre que des équations du premier degré. En effet, soient les $2r$ équations de degré quelconque

$$X_1 - C_1 = 0,\quad X_2 - C_2 = 0, \ldots,\quad X_r - C_r = 0,$$
$$X_1 + C_1 = 0,\quad X_2 + C_2 = 0, \ldots,\quad X_r - C_r = 0.$$

Il suffit de trouver une quantité l supérieure aux racines de ces équations, et une quantité λ inférieure à ces mêmes racines, l et λ seront des limites pour l'équation

$$f(x) = 0.$$

Si donc une de ces équations est de degré $p > 1$, on applique à cette équation le procédé ci-dessus, en choisissant une fonction $\varphi(x)$ de degré $p - 1$, et, en agissant ainsi, on arrivera par une sorte de trituration à n'avoir à traiter que des équations du premier degré.

5. On a

$$C_i = \mu_i + \frac{1}{\mu_{i-1}};$$

plus la valeur de μ_i est petite, et plus on aura de chances

à resserrer les limites dans les deux fractions $\frac{b_i \pm C_i}{a_i}$; par contre, on aura un désavantage sous ce rapport dans les deux fractions suivantes $\frac{b_{i+1} \pm C_{i+1}}{a_{i+1}}$; car $C_{i+1} = \mu_{i+1} + \frac{1}{\mu_i}$. Plus μ_i diminue, et plus C_{i+1} augmente. Cet inconvénient n'a pas lieu pour la dernière fraction; on peut donc prendre $\mu_n = 0$ et $C_n = \frac{1}{\mu_{n-1}}$.

6. Il est à remarquer que tous les raisonnements précédents subsistent en renversant la suite des μ et l'écrivant ainsi :

$$\frac{1}{\mu_{r-1}}, \quad \frac{1}{\mu_{r-2}} + \mu_{r-1}, \ldots, \quad \frac{1}{\mu_2} + \mu_1.$$

7. Il y a lieu à des recherches intéressantes sur la forme à donner à $\varphi(x)$, et sur les valeurs à donner aux quantités μ pour obtenir les limites les plus resserrées, et je crois être parvenu à démontrer que la forme la plus avantageuse est $f'(x)$, précisément la forme que M. Sturm a adoptée.

8. Dans la réduction en fraction continue de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, nous n'avons considéré que des quotients binômes; mais on peut pousser les divisions plus loin et obtenir des quantités de la forme

$$ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x_2} + \ldots + \frac{l}{x^r};$$

le reste correspondant sera de la forme

$$a'x^{r+1} + b'x^r + c'x^{r-1} + \ldots + \frac{l}{x^r}.$$

En opérant ainsi, le nombre de termes dans chaque reste ira en diminuant, comme dans le procédé ordinaire, et le dernier reste sera de la forme Cx^μ, μ étant un entier positif ou négatif, et le dernier quotient de la forme

$Px^p + Qx^{p-1}$, p étant un entier positif ou négatif; nommant les quotients ainsi obtenus $q_1, q_2, \ldots, q_r$, on voit aisément qu'on aura

$$f(x) = Mx^{\pm i}D,$$

où M est une constante, i un nombre entier positif ou négatif dont la valeur dépend de la manière dont on a opéré dans les divisions successives, et D est le dénominateur de la fraction continue

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots + \frac{1}{q_{r-1}} + \frac{1}{q_r}.$$

Donc, si l'on écrit, comme ci-dessus,

$$X = (q_1^2 - C_1^2)(q_2^2 - C_2^2)\ldots(q_r^2 - C_r^2) = 0,$$

nommant L et Λ les racines extrêmes de cette équation, si zéro n'est pas compris entre $+\infty$ et L, ni entre Λ et $-\infty$, la démonstration donnée ci-dessus subsiste encore pour le cas général. Et lors même que zéro est compris entre ces limites, L et Λ restent tout de même les limites pour les racines, abstraction faite de la racine zéro.

Observation. L'illustre analyste est parvenu à donner encore une plus grande extension à son théorème, et même à substituer les quotients $a_1x + b_1$, $a_2x + b_2$, etc., aux résidus de M. Sturm pour découvrir le nombre de racines positives et négatives. (*Philosophical Magazine.* Juin 1853.)

L'auteur donne cette forme à la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \text{etc.}}}}$$

rendant négatifs tous les quotients, alors $N_i D_{i-1} - N_{i-1} D_i$ est toujours égal à $+1$; tandis que dans les fractions continues ordinaires cette différence est alternativement $+1$ et -1. Nous reviendrons sur ce

travail, qui contient des propriétés nouvelles et curieuses relatives aux quotients $a_1 x + b_1$; $a_2 x + b_2$; etc.

SOLUTION DE LA QUESTION 275;

PAR M. H. FAURE.

Aucun nombre de la forme $m^2(8x+7)$ ne peut être la somme de trois carrés.

On peut supposer dans cette formule que $m = 1$. Soit donc

$$8x + 7 = y^2 + z^2 + t^2.$$

Le premier membre étant impair, il faut que dans le second deux des carrés soient pairs et le troisième impair, ou bien qu'ils soient tous les trois impairs. Dans le premier cas, on aurait

$$y^2 + z^2 + t^2 = 4m + 1;$$

dans le second,

$$y^2 + z^2 + t^2 = 8m + 3.$$

Or, ni l'une ni l'autre de ces deux formes n'est compatible avec celle du premier membre de l'équation; donc elle ne peut exister.

RECTIFICATION DE LA QUESTION 242

(voir t. XII, p. 163);

PAR M. H. FAURE.

Une erreur grave (*) a été commise dans la deuxième partie de la démonstration. Il s'agissait de montrer que les équations

$$2a + 1 = u^2, \quad a^2 + (a+1)^2 = t^2,$$

(*) Signalée par M. Coupy, professeur au Prytanée de la Flèche.

étaient incompatibles : on est arrivé au résultat

$$u^4 - 2t^2 = 1;$$

c'est -1 qu'il faut lire dans le second membre, et alors l'équation n'a rien d'impossible. Voici ce que l'on peut faire. En ajoutant les deux équations et les retranchant l'une de l'autre, on trouve

$$t^2 + u^2 = 2(a+1)^2 \quad \text{et} \quad t^2 - u^2 = 2a^2;$$

puis, en multipliant celles-ci l'une par l'autre, on obtient

$$t^4 - u^4 = 4a^2(a+1)^2 = m^2.$$

Équation impossible, la différence de deux bicarrés ne pouvant être un carré.

MÉLANGES.

1. M. Meray (Charles), élève de l'institution Barbet (lycée Saint-Louis), démontre ainsi le théorème de projection stéréographique (page 101). Il conserve la même figure, et désigne par I l'intersection de la corde NN' prolongée avec la tangente AB; I est le pôle de CT; donc les quatre droites CN, CI, CN', CI' forment un faisceau harmonique; le diamètre XX' étant parallèle au rayon CI du faisceau, on a donc

$$tn = tn'.$$

2. M. Villemsens, élève de M. Catalan, institution Jauffret, fait observer que le problème résolu par M. Mannheim (p. 113) reste le même, en rendant fixes les centres et diminuant les rayons d'une longueur égale au plus petit rayon; par là, le plus petit cercle se réduit à un point que nous désignons par A; S étant le centre de similitude des deux autres cercles, on trouve le point d'intersection fixe A' de tous les cercles satisfaisant à la question, avec la droite SA; le lieu des centres est donc

la perpendiculaire à SA passant par le milieu de AA'; il est évident qu'on trouve quatre droites qui se coupent au centre radical des cercles donnés.

3. *Angles*. Bertrand (de Genève) désigne par ce mot, non des inclinaisons, mais des aires *infinies* ayant entre elles des rapports *finis*. Dans ce système, les *angles plans* sont des *faces*, et il se sert de cette locution, qui est une conséquence de sa manière de définir l'angle; mais en rejetant cette définition, la locution n'est plus admissible. Car l'angle solide ne présente aucun sens dans le système des inclinaisons, et Legendre s'est rapproché ici de Bertrand, *en disant* que l'angle solide est l'*espace angulaire compris entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point* (liv. V, *défin*. 6). Voici les définitions d'Euclide, relativement aux trois espèces d'angle.

Un angle plan est l'inclinaison de deux lignes l'une sur l'autre, lorsqu'elles sont dans un même plan, sans être sur la même droite [liv. I, *défin*. 8 (*)]. Lorsque les lignes qui comprennent l'angle sont droites, alors l'angle se nomme *angle rectiligne* (liv. I, *défin*. 9).

On voit qu'Euclide définit l'angle de deux lignes en général avant de définir l'angle rectiligne, et cela devait être, puisqu'il définit aussi la ligne en général avant la ligne droite.

Angle dièdre. L'inclinaison de deux plans l'un sur l'autre est l'angle aigu formé par les deux droites menées par un même point de l'intersection commune, perpendiculairement à cette intersection, dans chacun de ces deux plans (liv. XI, *défin*. 6); et il ajoute : Les inclinaisons de plusieurs plans sont dites *semblables*, lorsque les angles d'inclinaison décrits ci-dessus sont égaux (*défin*. 7).

(*) Définition ambiguë. R. Simson, dans sa traduction d'Euclide, la regarde comme une addition *editoris minus periti* (Notae).

Ainsi la mesure de l'inclinaison sert de définition, sauf à démontrer plus loin la constance de cette mesure.

Un angle solide est l'inclinaison d'au moins trois lignes l'une sur l'autre qui se rencontrent sans être dans le même plan; *autrement*, un angle solide est celui qui est limité par au moins trois angles plans, qui se réunissent en un même point sans être dans un même plan (liv. XI, *défin.* 11).

Euclide donne deux définitions : la première, pour conserver l'analogie d'inclinaison ; mais, cette définition n'étant pas claire, il en présente une seconde qui diffère par l'énoncé de celle de Legendre. A vrai dire, l'angle solide est un être *suî generis* qui ne peut pas se rattacher géométriquement aux deux autres angles. En effet, un angle plan ajouté à lui-même, reste angle plan formé par deux droites; il en est de même de l'angle dièdre : mais un angle trièdre ajouté à un angle trièdre, ne reste pas angle trièdre. Aussi, Lorentz, dans sa traduction d'Euclide, propose de donner à l'angle solide le nom de *coin* [Ecke (*)]. On ne peut comparer ces *coins* entre eux que sous le point de vue *dynamique*. Supposons que les sommets de deux angles solides soient les centres de deux sphères de même rayon. Si les points de chaque sphère exercent une action attractive dépendant de la distance sur les sommets devenus centres, les résultantes de ces actions sont proportionnelles aux aires des surfaces sphériques interceptées par l'angle solide. Cette aire sert de mesure et aussi de définition à l'angle solide, genre de définition qui peut aussi s'appliquer aux deux autres angles.

Quant aux angles de contact, d'osculation, ils appartiennent à cette classe d'idées que Leibnitz appelle *idées certaines et obscures;* et il y en a beaucoup de cette es-

(*) *Coin*, *cuneus* viennent du grec γωνια.

pèce en mathématiques. Telles sont les droites, la direction, les osculations de diverses espèces, les coefficients différentiels de divers ordres, etc.; il ne règne pas le moindre doute sur l'existence de ces objets, quoiqu'ils soient d'une représentation si obscure, qu'en cherchant à les éclaircir, on ne parvient qu'à substituer une obscurité à l'autre, et le plus souvent on perd au change.

4. *Problème polaire.* On a n points fixes dans un plan, et une relation entre les distances d'un point M à ces foyers, on demande à mener une tangente au lieu géométrique de M; problème proposé par Ehrenfried Walther de Tschirnhausen, dans sa *Medicina mentis*, page 68 (*), et résolu par Fatio, et ensuite, d'une manière générale, par l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits*, page 27). On trouve encore dans ce dernier ouvrage une manière de mener une tangente à une courbe décrite par le point d'une droite de longueur fixe, et s'appuyant sur deux courbes; la manière de mener des tangentes aux développées par réflexion et réfraction, etc.

5. Un professeur, dans une Lettre anonyme signée P.-P. G., me dit que les nouveaux programmes et même les anciens sont d'une *pénurie incroyable*, et ensuite me conseille de mettre les *Nouvelles Annales en rapport avec les programmes*. Il veut donc que les *Nouvelles Annales* soient aussi d'une *pénurie incroyable*. Ce n'est certainement pas son idée; mais il croit que « les *Nouvelles Annales* sont d'un caractère trop élevé, du moins pour les candidats ordinaires : tout au plus sont-elles à la portée des candidats supérieurs. » Je répondrai que les élèves *ordinaires*, pas plus que les professeurs *ordinaires*,

(*) Logique à l'usage des géomètres; d'une lecture attrayante; riche gentilhomme de la haute Lusace; il a vécu pour la science qu'il a enrichie des *Caustiques*, etc. Le grand roi l'a nommé, en 1699, membre associé de l'Académie des Sciences à l'âge de trente et un ans, par exception. Né en 1651; mort en 1708.

ne s'enquièrent d'un journal mathématique quelconque, élémentaire ou non. Les uns se contentent de donner des leçons, les autres de les recevoir. Il n'y a que ceux qui *veulent* connaître l'état actuel et même passé de la science, *aspirant* au progrès, qui lisent ces journaux. Or, une telle volonté, une telle aspiration ne se rencontrent guère que chez des esprits d'une certaine supériorité. Aussi plusieurs de nos questions s'adressent aux élèves supérieurs, et ils y répondent; d'autres questions, pour l'instruction générale élevée, s'adressent aux professeurs supérieurs, et plusieurs veulent bien s'en occuper. D'ailleurs, je prie M. P.-P. G. de prendre en considération deux points essentiels. Le premier est que les *Nouvelles Annales* sont dans la douzième année, et que tous les endroits épineux des éléments ont été traités à diverses fois et sous diverses faces, et l'on ne peut revenir éternellement sur les mêmes objets. S'il y a des omissions, des oublis, on rendrait service en me les indiquant, mais il faut faire attention que des explications extrêmement utiles, excellentes, données dans l'enceinte d'une classe, peuvent devenir *niaises* en les imprimant. Le talent du professeur consiste à diversifier ces explications selon le caractère d'esprit des élèves; mais le mérite de ces explications est purement individuel, local et rarement digne de publicité.

Le second point est que les *Nouvelles Annales* ont aussi en vue les gradués universitaires et les candidats à l'agrégation (*), comme le montrent les beaux travaux que nous devons au savant professeur de Grenoble. Il est vrai que le titre du journal n'annonce pas une telle destination. Mais il ne faut pas non plus donner à ce titre une interprétation trop judaïque. L'intérêt des candidats à nos deux grandes écoles est le but essentiel du Journal;

(*) La question d'agrégation de cette année-ci est d'une *naïveté* qui dépasse les bornes.

mais cet intérêt ne cesse pas avec leur entrée à ces écoles.

6. *Projection stéréographique*. Ce mode de projeter remonte à Hipparque (— 150); mais le nom a été introduit par le savant jésuite d'Aguillon (François) dans son ouvrage : *Opticorum libri sex*. Antwerp., 1613; *Plantin*, in-folio. On lit à la page 572 : *Quare tametsi stereographices nomine nusquam vocatum hoc projectionis genus experimus; quia tamen nec alio quidem ullo solitum est appellari, placuit hoc nomen usurpari.*

Le livre sixième (page 452) est un traité très-étendu des projections orthographiques, scénographiques et stéréographiques.

Note biographique. D'Aguillon est né à Bruxelles en 1567; il professa la philosophie et la théologie, et fut le premier qui fonda l'enseignement des mathématiques parmi les jésuites des Pays-Bas. Ses confrères ayant été attaqués de la peste, il ne cessa de les soigner, et supporta avec une extrême patience de grandes et longues douleurs. Il mourut à Anvers, le 20 mars 1617. Voici ses dernières paroles : *Fiat voluntas Dei; in ea conquiesco; ad Dei nutum me penitus fingere volo*. Il laissa la catoptrique et la dioptrique inachevées.

7. Le manuscrit de Pappus de la Bibliothèque impériale, dont il est question ci-dessus (page 122), a été écrit pour Ramus par son ami le savant médecin Nicolas de Nancel; né en 1539, au village de ce nom près de Noyon, de parents très-pauvres, il vint à Paris où, grâce aux secours de Ramus, il fit ses études médicales. Il a laissé plusieurs ouvrages, entre autres *Petri Rami Vita*, 1599, in-8°; par modestie, il prenait le titre de *Trachyenus Noviodunensis*, paysan du Novionnais. Le savant Weiss lui a consacré un article dans la *Biographie* Michaud. Ceci explique la signature du manuscrit. Ni Moreri (édition de 1735), ni Bayle ne font mention de cette Vie de Ramus par Nancel.

8. *Notation différentielle.* La notation Leibnitzienne a été admise la première fois en Angleterre, en 1803, dans un ouvrage de M. Woodhouse, intitulé : *Principles af analytical calculation.* La traduction anglaise de Lacroix, où la même notation est employée, date de 1816; maintenant, elle est généralement adoptée. A l'Université de Cambridge, on se sert souvent de la notation d_x pour dire qu'une fonction doit être différentiée par rapport à x; ainsi $d_x y$ pour $\frac{dy}{dx}$, et $d_x^2 y$ pour $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Cette notation, employée par M. Cauchy, est quelquefois commode, surtout pour les différentielles partielles. Mais cette commodité disparaît quand on veut conserver cette notation dans les intégrations. Ainsi, on écrit

$$d_x \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

et il y a des auteurs anglais qui, pour être conséquents au principe, écrivent

$$\int_x \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2};$$

ce qui est parfaitement inintelligible. On écrit aussi

$$d_x (u + v + z) \quad \text{pour} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx}:$$

cette notation abrégée a été adoptée aussi par M. Lamé, dans son dernier ouvrage sur l'élasticité; ou bien encore

$$\frac{d}{dx}(u + v + z).$$

9. *Arithmologie.* Dans le XLIIe volume (1851) du Journal de M. Crelle, page 304, le savant éditeur a calculé une Table contenant les plus petits nombres entiers qui satisfont à l'équation

$$a_1 x_2 = a_2 x_1 + 1;$$

a_1, a_2, x_1, x_2 sont des nombres entiers positifs, et $a_1 > a_2$; depuis $a_1 = 1$ jusqu'à $a_1 = 120$; la Table est de dix pages. On donne des moyens abréviatifs de calcul pour prolonger la Table, et l'auteur exprime le désir de la voir continuer au moins jusqu'à $a_1 = 1000$. Les arithmologues comprennent l'utilité d'une telle Table qui peut même servir à rendre plus expéditives certaines opérations de l'arithmétique vulgaire, par exemple, dans la comparaison des poids et mesures, etc.

10. *Physique mathématique.* M. Jacob Amsler, de Halden, en Suisse, a écrit deux Mémoires très-instructifs sur la théorie de l'attraction et de la chaleur (Journal de M. Crelle, tome XLII, page 316; 1851). On sait que M. Liouville a donné une démonstration fort simple de cette proposition, que les équations qui expriment les conditions de *l'équilibre électrique* ne sont susceptibles que d'une seule solution (*Additions à la Connaissance des Temps*; 1845). M. Amsler établit la même proposition pour l'équation qui satisfait à l'équilibre magnétique, équation qu'on doit à Poisson (*Mémoires de l'Institut*, tomes VI et VIII). Poisson démontre qu'une certaine équation transcendante a une infinité de valeurs *toutes réelles*, et montre qu'elles sont positives dans *certains* cas (*Théorie de la chaleur*, p. 178). M. Amsler *démontre* qu'elles sont toujours positives.

La chaleur spécifique des corps est plus grande sous une *pression constante* que sous un *volume* constant. Des expériences ont été faites, pour constater cette loi, sur les corps sous formes gazeuses (Delaroche, Bérard, Dulong), et sur les corps solides, par M. Wertheim (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, tome XII, page 385). Cette loi doit nécessairement modifier les lois de la conductibilité dans l'intérieur des corps. Les géomètres n'y ont pas encore eu égard. C'est l'objet du second Mémoire du savant suisse.

11. *Cours rendus populaires.* Il n'est pas rare de rencontrer des professeurs chargés d'un haut enseignement destiné au petit nombre (*pusillus grex*), abaisser à dessein cet enseignement pour attirer la foule. Ce manége peu loyal est ancien. On lit dans la Vie d'Épicure : « Καὶ σχολεν παρασκευασειν αλλα ϰκ ὥστε ὀχλαγωγῆσαι : *Scholum aperturum; sed non eò usque ut populare auditorium fiat.* » (Gassendi, *Op. omn.*, t. V, p. 118. Diogenis Laertii *Liber decimus.*) *Nihil novi sub sole!*

13. Chez les Grecs, la partie théorique des nombres se nommait *arithmétique,* et la partie pratique *logistique.* Cette *arithmétique* grecque était bien pauvre en comparaison de celle des Indiens; il paraît même que c'est des Indiens que les Grecs ont appris le peu qu'ils savaient sur les nombres. Cela provient de l'absence d'un système de numération.

THÉORÈME SEGMENTAIRE DE M. STUBBS. RECTIFICATION

(voir p. 209);

Par M. PROUHET.

C'est par inadvertance qu'on a placé la seconde inégalité de la page 209 à la suite du théorème de M. Stubbs dont elle n'est pas une conséquence. En outre, le dernier membre n'est pas l'unité, mais une fonction des côtés du triangle, fonction qui sera trouvée sans doute par ceux qui voudront bien prendre la peine de démontrer le théorème.

DIVISION PRATIQUE DE LA CIRCONFÉRENCE EN PARTIES ÉGALES

(voir p. 77);

Par M. TEMPIER,
Sous-directeur des Écoles chrétiennes à Montpellier.

Le procédé pratique de Bion expliqué par M. le profes-

seur Housel est susceptible d'une utile modification lorsque n étant pair n'est pas inférieur à 8. Je propose le procédé suivant :

Divisez le diamètre AB en autant de parties égales qu'on veut en avoir sur la circonférence; des points A et B comme centres, et avec AB comme rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en C, puis, *si le nombre de divisions est inférieur à* 8, joignez le point C à la seconde division du diamètre *à partir de l'extrémité;* l'arc BD sera la portion demandée de la circonférence. *Si le nombre de divisions étant pair est égal à* 8 *ou plus grand*, menez par le point C deux sécantes passant, l'une CF par le centre O, et l'autre CE par la deuxième division *à partir du centre;* l'arc EF, intercepté par les deux sécantes, est l'arc demandé.

Cette modification donnera, pour les cas qui se trouveront dans la deuxième condition de l'énoncé, une approximation incomparablement plus grande que celle qui est donnée par l'énoncé primitif.

Pour justifier cette assertion, il suffit de calculer l'angle EOF ou δ pour les diverses valeurs de n, de comparer les résultats aux valeurs exactes $\frac{360}{n}$, et les différences à celles qu'ont fait connaître les calculs de M. Housel.

Les calculs que j'ai employés pour arriver à la valeur de sinus δ étant analogues à ceux de ce mathématicien pour connaître l'angle qu'il a nommé γ, je crois inutile de les transcrire; voici l'expression générale à laquelle ils m'ont conduit,

$$\sin\delta = \frac{12n + \sqrt{48n^2 - 512}}{3n^2 + 16},$$

formule qui confirme ce que l'on savait, à priori, que le procédé n'est pas applicable lorsque $n < 4$, parce qu'alors le radical serait imaginaire.

Voici les résultats des calculs pour diverses valeurs paires de n :

						DIFFÉRENCE donnée par le procédé de Bion.
Pour $n = 4$,	$\delta = 90°$		exact.			exact.
$n = 6$,	$\delta = 59° 31' 35''$	au lieu de	60°	différence	$-28' 45''$	exact.
$n = 8$,	$\delta = 44.48.45''$	*id.*	45	*id.*	-11.15	$+11' 15''$
$n = 10$,	$\delta = 35.56.32$	*id.*	36	*id.*	$-\ 3.28$	$+21.24$
$n = 12$,	$\delta = 30$	*id.*	30	*id.*	0	$+29.45$
$n = 14$,	$\delta = 25.44.27$	*id.*	25.42′ 52″	*id.*	$+\ 1.35$	$+32.56$
$n = 16$,	$\delta = 22.30.20$	*id.*	22.30	*id.*	$+\ 2.20$	$+35.54$
$n = 18$,	$\delta = 20.\ 2.40$	*id.*	20	*id.*	$+\ 2.40$	
$n = 20$,	$\delta = 18.\ 2.48$	*id.*	18	*id.*	$+\ 2.48$	
$n = 22$,	$\delta = 16.24.37$	*id.*	16.21.49	*id.*	$+\ 2.48$	
$n = 30$,	$\delta = 12.\ 2.29$	*id.*	12	*id.*	$+\ 2.29$	
$n = 40$,	$\delta = 9.\ 2.\ 2$	*id.*	9	*id.*	$+\ 2.\ 2$	
$n = 50$,	$\delta = 7.13.39$	*id.*	7.12	*id.*	$+\ 1.39$	
$n = 60$,	$\delta = 6.\ 1.26$	*id.*	6	*id.*	$+\ 1.26$	
$n = 70$,	$\delta = 5.\ 9.49$	*id.*	5. 8.34	*id.*	$+\ 1.15$	
$n = 80$,	$\delta = 4.31.\ 6$	*id.*	4.30	*id.*	$+\ 1.\ 6$	
$n = 90$,	$\delta = 4.59$	*id.*	4	*id.*	$+\ 59$	
$n = 100$,	$\delta = 3.36,53$	*id.*	3.36	*id.*	$+\ 53$	

Ce tableau montre : 1° que ce procédé est plus exact, et, par conséquent, doit être préféré à celui qui est indiqué par Bion lorsque n égale ou surpasse 8; 2° qu'il donne exactement le douzième de la circonférence; qu'à partir de $n = 12$, les différences augmentent soit en moins, soit en plus; 4° que le maximum de ces différences est $0° 2' 48''$ et correspond à $n = 20$ et 22; au delà de ce nombre, elles vont en diminuant.

Note. Lorsque n est impair, il faut le doubler, afin que le centre O soit un point de division.

COSMOGRAPHIE.

Historique de la découverte des sept premières nouvelles planètes; d'après M. *Encke* (*Membre de l'Académie de Berlin;* 1847. Sur la planète Astrée. Imprimée à part en 1849). In-4° de 39 pages.

Les anciennes planètes, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, sont tellement brillantes, que leurs mouvements parmi les étoiles fixes ne pouvaient échapper à un observateur attentif, même dénué de tout moyen auxiliaire. Il n'en est pas ainsi des nouvelles planètes, et même, depuis l'invention des télescopes, un siècle et demi s'écoula avant que les limites de notre système solaire fussent reculées.

Uranus. 13 mars 1751. *William Herschel* (*). Bath.

Sixième grandeur.

De là cette surprise lorsque Herschel étant à Bath (Angleterre), découvrit dans la soirée du 13 mars 1781, une étoile mobile, ayant un disque d'une grandeur sensible; surprise tellement grande, qu'on ne voulut d'abord voir dans la nouvelle planète qu'une nouvelle comète.

C'est à un grand perfectionnement dans la construction des télescopes à miroir que Herschel doit sa découverte, et à la confiance qu'il avait que ses instruments lui donneraient la solution du problème de la parallaxe des

(*) Né à Hanovre, le 15 novembre 1738, mort à Slough près Londres, le 23 août 1822, âgé de quatre-vingt-trois ans. Tout le monde a lu et relu l'*Analyse historique et critique de la vie et des travaux de sir William Herschel,* par M. Arago. (*Annuaire* pour l'an 1842; 2e édition, chez Mallet-Bachelier, libraire.)

étoiles, problème dont la recherche avait déjà amené la découverte de l'aberration et de la nutation. Convaincu que la forme la plus parfaite des miroirs, lorsque la distance focale dépasse 6 pieds, était indépendante des règles qu'on suit pour leur donner une forme parabolique, mais dépendait de certains procédés d'art pratique, il confectionna pour chacun de ses télescopes de 7, 10 et 20 pieds de longueur, trois miroirs. Il plaçait le meilleur dans l'instrument, et s'en servait pour passer la revue du ciel; il repolissait ensuite les autres miroirs et choisissait encore le meilleur: chacun des miroirs lui servait à éprouver et à perfectionner les autres. Par d'ingénieux maniements, il pouvait diriger ses longs tubes sans de grands efforts. Enfin, ne se laissant pas arrêter par des considérations étrangères, il employa des grossissements inusités jusqu'alors. C'est avec un grossissement de 227, qui ne permet qu'un champ de $4\frac{1}{2}'$, que, dans la soirée indiquée ci-dessus, il observa entre les cornes du Bélier et les pieds des Gémeaux, à l'endroit où la voie lactée traverse le zodiaque, une étoile de sixième grandeur, ayant un disque sensible qu'un grossissement de 460 et de 932 grandissait encore notablement. Le mouvement de l'étoile ne s'élevant alors qu'à $\frac{3}{4}'$ par jour, il n'aurait pu reconnaître par le déplacement seul, le caractère planétaire de l'étoile. Cette découverte est uniquement le résultat de perfectionnements optiques, et de l'énergique persévérance d'un homme qui avait du génie dans la tête et dans la main.

CÉRÈS. 1er janvier 1801. *Piazzi* [*Joseph* (*)]. Palerme.

Huitième grandeur.

La découverte d'Uranus conduisait naturellement et

(*) Théatin, né à Ponte dans la Valteline, le 16 juillet 1746, mort à Naples le 22 juillet 1803, âgé de cinquante-sept ans.

pendant longtemps à observer de la même manière le ciel avec des grossissements considérables, afin de reconnaître les planètes par la forme de leurs disques; on dit même que Herschel a continué ainsi pendant quelques années, mais sans succès. Ce ne fut que le 1er janvier 1801 que le père Piazzi découvrit une seconde nouvelle planète. Chargé de construire un observatoire à Palerme, en 1788, il s'était rendu en Angleterre pour demander des instruments au célèbre Ramsden et être présent à l'exécution. L'instrument qu'il remporta et dont l'idée appartient à Piazzi fait époque, parce qu'il est le premier qui renferme un cercle complet, de 5 pieds de diamètre, et depuis les perfectionnements apportés dans les machines à diviser, on a abandonné en astronomie les sextants et les quadrants. Mais ce qu'il y a de plus remarquable, c'est l'ordre que Piazzi mit dans ses observations, ordre qui contribua essentiellement à la découverte de Cérès. Piazzi entreprit la formation d'un catalogue d'étoiles où il prit pour base le travail de Wollaston. Afin d'atteindre le but avec promptitude, commodément, et pourtant avec une exactitude suffisante, Piazzi suivit cette marche que l'on ne connaît bien que maintenant, par l'impression des observations de Piazzi, que Littrow de Vienne a fait insérer dans les *Annales de Vienne*. Le beau ciel de la Sicile est rarement troublé par des nuages qui interrompent les observations; pendant toute l'année le ciel est presque sans nuages. Piazzi choisit donc certaines étoiles déterminées qu'il voulait observer pendant plusieurs jours consécutifs, le plus souvent six jours; c'est ce qu'il nomme un *corso*, et il coordonnait ensuite les observations de la même étoile faites pendant les divers jours du *corso*. A raison de la rapide succession des jours et la rareté des interruptions, on pouvait, sans inconvénient, obtenir la réduction des observations en prenant la *moyenne* des observations de la même étoile, et les comparaisons jour-

nalières offraient un criterium sûr pour estimer l'exactitude et faire disparaître les erreurs; outre les étoiles *choisies*, il observait dans les intervalles les étoiles voisines que l'on pouvait prendre sans troubler les observations principales. C'est à cet arrangement, convenable au climat et au but que Piazzi se proposait, que le célèbre astronome doit de n'avoir pas laissé échapper Cérès, étoile de huitième grandeur; car l'ayant observée dans une soirée entre la queue du Taureau et le Bélier, la suite des jours du *corso* exigeait qu'il devait l'attendre aux jours suivants, et dès lors il pouvait reconnaître à un notable déplacement, que c'était une étoile mobile digne d'une attention spéciale. Cette découverte est donc le résultat de l'exécution d'un grand travail distribué avec une extrême perspicacité de vue. Dans nos climats septentrionaux, où les observations méridiennes sont interrompues pendant longtemps par des nuages, une telle distribution ne serait nullement convenable, si l'on voulait s'y tenir exclusivement.

Pallas. 28 mars 1802. *Olbers* [*Henri-Guillaume-Mathias* (*)]. Brême.

Huitième grandeur.

Une conséquence des plus importantes pour la science de la découverte de Cérès, est d'avoir donné Gauss à l'astronomie théorique et pratique. C'est à cette occasion qu'il résolut le premier le problème de déterminer une orbite par un nombre d'observations ne dépassant pas le nombre nécessaire. Toutefois, ni l'exactitude, ni la multiplicité des observations de Piazzi ne pouvaient, même avec les calculs d'un Gauss, indiquer avec précision l'en-

---

(*) Médecin et astronome, né à Arbergen près Brême, le 11 octobre 1758, mort à Brême le 2 mars 1840, âgé de quatre-vingt-deux ans.

droit où Cérès devait se trouver en se dégageant du Soleil, et cela sans avoir besoin de la connaissance la plus minutieuse de la sphère céleste. Il fallait au moins avoir exploré et retenu dans l'imagination une étendue de 16 à 20 degrés. C'est précisément cette grande région céleste qui amena le plus grand connaisseur du ciel étoilé parmi les astronomes modernes, qui amena Olbers, le 28 mars 1802, à découvrir Pallas presque au même endroit, à 30 minutes près où, quatre mois auparavant, d'après les calculs de Gauss, il avait retrouvé Cérès à sa sortie des rayons solaires. Cette découverte est donc le fruit d'une connaissance locale exacte d'une grande région céleste. L'observation d'une étoile nouvelle dans un endroit très-familier à Olbers le conduisit à une observation continue de cette étoile, qui, manifestant un mouvement assez notable, donna la certitude de son caractère planétaire.

Junon. 1er septembre 1804. *Harding*. Lilienthal.

Huitième grandeur.

Cette succession de découvertes de deux planètes, presque à égales distances du Soleil, fit naître la conjecture qu'il pouvait se trouver plusieurs autres planètes dans la même région. En tout cas, l'observation de celles qu'on venait de trouver exigeait de nouveaux moyens auxiliaires pour pouvoir les observer avec suite et efficacité. Ici, les *oppositions* auxquelles on s'était presque exclusivement borné, pour les anciennes planètes, ne suffisaient plus. Il était nécessaire, au moins pendant les premières années, de poursuivre aussi des planètes aussi faibles, même hors du méridien, pendant tout le temps qu'elles n'étaient pas couvertes par les rayons solaires, enfin d'obtenir dès les premières années des éléments approchés. Mais les cartes célestes d'alors ne suffisaient pas pour trouver avec facilité des étoiles si faibles. Car, ou ces cartes étaient d'une date trop ancienne, comme celles de Flam-

stead, et ne contenaient que les étoiles les plus brillantes, et en si petit nombre, que dans la grande quantité d'étoiles faibles il n'était pas possible de retrouver la planète; ou bien, lorsque ces cartes renfermaient beaucoup de détails, elles n'étaient pas rapportées avec la critique convenable; de sorte que par des fautes d'impression, d'écriture et de calcul, on trouvait sur la carte des étoiles qui n'étaient pas au ciel, et *vice versâ*. Le trésor d'observations contenu dans l'*Histoire céleste*, de Lalande (1801), n'avait pas été mis à profit, parce que la publication des cartes avait précédé celle de cet ouvrage. Afin de pouvoir suivre le cours des petites planètes, le professeur Harding entreprit le pénible travail, qu'il a heureusement terminé, de dresser des cartes stellaires sans aucune figure de constellation, et qui renferment toutes les étoiles consignées dans des catalogues avérés, dans l'*Histoire céleste*, et dans les journaux d'observations faits pour remplir les lacunes de l'*Histoire céleste*.

Ce sont les premières cartes célestes faites sur une base sûre. Elles ne contiennent que des étoiles qui ont été observées à l'endroit indiqué, et, pour empêcher les fautes dans l'écriture des nombres, qu'il est impossible d'éviter entièrement, Harding se soumit à la très-pénible épreuve d'observer chaque point du ciel, et de contrôler ainsi sa position relativement aux étoiles fixes de position certaine. Ces cartes, qui s'étendent sur tout le ciel, servent encore de fondements à toutes les recherches, et ont été mises à profit par tous les constructeurs de cartes venus après Harding.

Le résultat de ce dessin du ciel, exécuté pour les premières fois d'après un principe sûr, est la découverte de Junon, le 1er septembre 1804; étoile de huitième grandeur.

VESTA. *Olbers*. 29 mars 1807.
Sixième grandeur.

Jusqu'ici, les découvertes sont les conséquences du perfectionnement optique des instruments, de la révision méthodique du ciel avec un instrument fixe, de la connaissance locale parfaite d'une partie du ciel, et enfin de cette connaissance étendue à tout le firmament; maintenant, nous aurons à signaler un nouveau fait, une *idée* dirigeant les recherches, *idée directrice* qui, sans être fondée sur des considérations rigoureusement théoriques, n'est pourtant pas invraisemblable à première vue, et doit son origine à des efforts ingénieux pour expliquer cette singularité que trois planètes, trois petites planètes se meuvent à des distances égales du Soleil, tandis que les grandes planètes décrivent des orbites de rayons si différents, que si l'on remplaçait les trois petites planètes par une seule et au même endroit, le rayon d'une orbite planétaire serait au rayon de la planète voisine dans le rapport de 2 : 3 ou même de 1 : 2. Ceci revient, au fond, à supposer, ou que les trois planètes sont trois éclats d'une plus grande planète qui a fait explosion, ou bien que ces planètes ont été formées simultanément dans la même région par le même procédé qui a présidé à la formation des grandes planètes. Cette explication est connue sous le nom d'*hypothèse* d'Olbers. Toutefois, soit avant la découverte de Vesta, soit après, Olbers n'a pour ainsi dire qu'énoncé cette hypothèse, et même assez rarement, sans jamais prétendre la fonder scientifiquement; et, au fait, cette hypothèse est contraire à la théorie, du moins si l'on admet une explosion. Car, dans ce cas, le lieu de l'explosion devrait être le point commun d'intersection de toutes les orbites décrites par les fragments, abstraction faite des perturbations qui peuvent produire de légères

modifications. Il existe, en effet, un point où les orbites de Pallas et de Cérès se rapprochent extrêmement. Les perturbations séculaires, sans être encore exactement connues, le sont pourtant assez pour déterminer les changements dans ce point de croisement des orbites, et le calcul apprend que dans le passé les deux orbites n'ont jamais pu se rencontrer, mais que cela peut arriver dans l'avenir (*). Cependant c'est toujours un fait remarquable, qui ne pouvait être connu que depuis quelques années, savoir, que très-vraisemblablement les planètes qui sont entre la région des astéroïdes et du Soleil ont à peu près même densité que la Terre, et que les planètes derrière les astéroïdes relativement au Soleil ont une densité moindre, s'approchant de la densité du Soleil, qui est le quart de la densité terrestre.

Toute *idée directrice*, même hypothétique, est un excellent stimulant, pourvu qu'on ne fasse pas violence aux faits pour les adapter à l'hypothèse. C'est par des analogies défectueuses que Képler est venu à sa loi *des aires*, et même la loi dite de Bode a dirigé dans la découverte de Neptune et a facilité les recherches. C'est ainsi qu'Olbers s'est servi de son hypothèse de la bonne manière en prolongeant la ligne d'intersection de l'orbite de Pallas et de Cérès vers l'endroit où les deux orbites sont les plus rapprochées, et détermina par là la région du ciel où des astéroïdes de même origine ont dû un jour se trouver. A cet effet, il revisait chaque mois la partie nord-ouest de la Vierge et la partie ouest de la Baleine. Il acquit ainsi, et c'est ce qu'il y avait de plus avantageux, la connaissance parfaite de toutes les étoiles de ces deux constellations. Ce n'est donc pas purement de hasard qu'il rencontra, le 29 mars 1807, dans l'aile nord-

---

(*) *Correspondance mensuelle de Zach*, t. XXVI, p. 299.

ouest de la Vierge, une étoile brillante, inconnue, de sixième grandeur, qu'il prit pour une planète. Le mouvement régulier des soirées suivantes confirma pleinement cette conjecture, et Vesta, nom donné par Gauss, qui en calcula tout de suite l'orbite, fut admise promptement au nombre des planètes.

Olbers a continué à suivre la même marche, mais sans succès. On peut en conclure qu'il n'existe peut-être plus d'astéroïdes de sixième, septième et huitième grandeur, ou bien qu'il est bien possible que, vu la grande étendue d'étoiles à examiner, quelques-unes peuvent avoir échappé même à un connaisseur comme Olbers. Quant aux étoiles de neuvième grandeur, le nombre en est trop considérable pour retenir dans la mémoire l'image de la région et ne pas omettre une telle étoile.

(*La fin prochainement.*)

NOUVELLES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES DES SURFACES DE NIVEAU;

D'APRÈS M. JACOB AMSLER,
De Halden, en Suisse.

(Journal de M. Crelle, tome XLII, page 314; 1851.)

---

1. Soit $f(x, y, z)$ une fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z qui satisfont à l'équation aux différences partielles,

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0;$$

alors l'équation

$$f(x, y, z) = \text{constante}$$

représente un système de *surfaces de niveau*.

Soient

(1) $$f(x, y, z) = \alpha_1,$$

(2) $$f(x, y, z) = \alpha_2,$$

deux de ces surfaces, et p_1, q_1 deux points sur la première surface (1). Par p_1 et q_1 on fait passer deux trajectoires du système qui rencontrent la surface (2), respectivement en p_2 et q_2. Nommons p_1 et p_2 *points correspondants;* de même q_1 et q_2. On a la proposition suivante :

Théorème. *La distance de deux points quelconques des deux surfaces comme p_1 et q_2 est égale à la distance des points correspondants p_2, q_1.*

(Sans démonstration.)

Au moyen de cette propriété géométrique, on peut démontrer cette proposition de mécanique :

Théorème. *Si les surfaces* (1) *et* (2) *sont des masses homogènes, l'attraction de la masse de la surface* (1) *sur le point p_2 de la surface* (2) *peut se ramener à l'attraction que le point correspondant p_1 éprouve de la part de la masse* (2).

Soient V_1 le potentiel de l'action sur p_2, et V_2 le potentiel de l'action sur p_1; on aura

$$\frac{\frac{dV_1}{dx_1} f'(x_1) + \frac{dV_1}{dy_1} f'(y_1) + \frac{dV_1}{dz_1} f'(z_1)}{f'(x_1)^2 + f'(y_1)^2 + f'(z_1)^2} = \frac{\frac{dV_2}{dx_2} f'(x_2) + \frac{dV_2}{dy_2} f'(y_2) + \frac{dV_2}{dz_2} f'(z_2)}{f'(x_2)^2 + f'(y_2)^2 + f'(z_2)^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dV_1}{d\alpha_1} = \frac{dV_2}{d\alpha_2}.$$

Cette proposition a lieu pour toute loi d'attraction qui ne

dépend que de la distance. C'est une généralisation du théorème d'Ivory dans la théorie de l'attraction des ellipsoïdes et de l'extension donnée à ce théorème par Poisson.

Les démonstrations sont à trouver.

THÉORÈMES SEGMENTAIRES

(voir t. XII, p. 272).

Faisceaux de lignes à paramètre linéaire variable.

8. Si une courbe plane est donnée par une équation en x, y de degré m, courbe désignée, selon la notation de M. Steiner, par C^m, et si les coefficients de l'équation sont des fonctions linéaires d'un paramètre variable z, cette équation peut être mise sous la forme $Pz + Q = 0$, où P et Q sont des fonctions entières de x, y de degré m; en donnant à t toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, on obtient un faisceau de courbes que nous désignons, avec M. Steiner, par F^m; il est évident que toutes ces courbes passent par les mêmes m^2 points, donnés par les équations

$$P = 0, \quad Q = 0;$$

ces points sont les enveloppes du faisceau. Soit maintenant un second faisceau de degré n ou F^n, donné par une équation analogue $pz + q = 0$; p et q sont des fonctions entières de x, y de degré n; les courbes de ce faisceau passent par les mêmes n^2 points. On nomme *courbes correspondantes* dans les deux faisceaux, les courbes qui correspondent à la même valeur de z; nous nommons deux faisceaux ainsi construits *faisceaux homographiques :* cette épithète, introduite par M. Chasles, est alors prise dans un sens général.

9. Théorème. *Étant donnés deux faisceaux homographiques* F^m, F^n, *les intersections des courbes correspondantes sont sur une courbe de degré* $m+n$ *et cette courbe passe par* $(m+n)^2$ *points déterminés.*

Démonstration. Soient

$$Pz+Q=0, \quad pz+q=0$$

les équations respectives des faisceaux F^m, F^n; la valeur de z étant la même pour deux courbes correspondantes, les points d'intersection de ces deux courbes sont une ligne donnée par l'équation

$$Pq-Qp=0,$$

qui est de degré $m+n$; on satisfait à cette équation par les quatre systèmes

$$P=0, \quad Q=0; \quad P=0, \quad p=0;$$
$$Q=0, \quad q=0; \quad p=0, \quad q=0;$$

systèmes qui déterminent $(m+n)^2$ points parmi lesquels se trouvent les m^2 points fixes du faisceau F^m et les n^2 points fixes de F^n.

10. Théorème. *Toute courbe plane de degré* $m+n$ *peut être engendrée par l'intersection de deux faisceaux homographiques* F^m, F^n.

Démonstration. Soit $M=0$ l'équation donnée d'une courbe plane de degré $m+n$; cette équation renferme $\frac{(m+n)(m+n+3)}{2}=r$ coefficients (le coefficient du premier terme étant l'unité). Prenons deux fonctions complètes P, Q de degré m, ces fonctions renferment ensemble $(m+1)(m+2)$ indéterminées; prenons aussi deux fonctions complètes p, q de degré n; ensemble, elles contiennent $(n+1)(n+2)$ indéterminées. L'équation

$$Pq-Qp=0$$

contient donc $m^2 + n^2 + 3m + 3n + 3 = s$ indéterminées; en identifiant cette dernière équation avec l'équation $M = 0$, on obtient r équations entre s indéterminées; or

$$s - r = \frac{(m-n)^2 + 3(m+n+2)}{2} = t;$$

ainsi, parmi les s indéterminées on peut en prendre t arbitrairement.

11. Faisons

$$m = n = 1;$$

ainsi on peut construire une conique par les intersections de deux faisceaux linéaires homographiques; c'est ce qu'on connaît depuis longtemps par les travaux de MM. Chasles et Steiner (*).

$m = 1$, $n = 2$; une ligne du troisième degré est donc le résultat de l'intersection de deux faisceaux F^1, F^2. (Chasles, *Comptes rendus*, 1853; 30 mai, page 949.)

$m = 1$, $n = 3$ ou bien $m = 2$, $n = 2$; on peut donc construire une courbe du quatrième degré par les intersections de F^1, F^3 ou bien par les intersections de F^2, F^2, et ainsi de suite.

12. *Définition*. Si d'un point A pris dans le plan d'une courbe C^m on mène les $m(m-1)$ tangentes, les points de contact sont sur une ligne C^{m-1}, qu'on nomme *première polaire* du point A relativement à la ligne C^m; si l'on prend la première polaire du même point A relativement à C^{m-1}, on a une courbe C^{m-2} qu'on nomme la *seconde polaire* du point A par rapport à la courbe première C^m, et ainsi de suite; de sorte que C^{m-p} est la polaire $p^{\text{ième}}$ de A par rapport à C^m. (Bobillier, *Annales de Gergonne*, tome XVIII, page 89; 1827.)

(*) Le premier travail de M. Chasles date de 1829 (*Correspondance mathématique* de Quételet, tome V, page 293); l'ouvrage de M. Steiner est de 1832. (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 149.)

13. Théorème. *Étant donné le point* A *dans le plan du faisceau* F^m, *les polaires d'ordre* p *relativement aux courbes du faisceau* F^m *forment un faisceau* F^{m-p} *homographique au faisceau* F^m.

Démonstration. Le faisceau F^m est représenté par l'équation

$$Pz + Q = 0 \quad (\S\ 8),$$

et le faisceau F^{m-p} par l'équation

$$pz + q = 0;$$

donc, etc.

14. Théorème. *Soient* n *courbes du faisceau* F^m; *ces courbes ont* m^2 *points en commun* (§ 8); *si à chaque point commun on mène des tangentes aux courbes qui y passent, on aura un faisceau de* n *droites, et par conséquent* m^2 *faisceaux de droites qui sont homographiques.*

Démonstration. L'équation de ces courbes a la forme

$$Pz + Q = 0;$$

l'équation d'une tangente est

$$(Tz + U)(y - y_1) = (Rz + S)(x - x_1),$$

où x_1, y_1 sont les coordonnées du point de contact et R, S, T, U des fonctions entières en x_1, y_1 de degré $m - 1$; les valeurs de ces fonctions sont les mêmes pour toutes les tangentes à un point commun aux n courbes; donc l'équation de la tangente renferme le paramètre *linéaire* z; donc, etc.

15. *Corollaire.* Si l'on prend les n polaires d'ordre p, de n courbes C^m du faisceau F^m par rapport à un point A pris dans le plan du faisceau F^m, on aura n courbes C^{m-p} passant par les mêmes $(m - p)^2$ points; par chacun de ces points passe un faisceau de n tangentes qui est homographique au faisceau des n tangentes qui passe par un des m^2 points communs des n courbes C^m du faisceau F^m.

Faisceaux de surfaces à un paramètre variable linéaire.

16. Si une surface S^m est donnée par une équation de degré m en x, y, z, et si les coefficients de l'équation sont des fonctions linéaires d'un paramètre u, cette équation peut prendre la forme

$$Pu + Q = 0,$$

où P et Q sont des fonctions en x, y, z de degré m. En donnant à u toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, on a un faisceau de surfaces que nous désignons par φ^m; toutes ces surfaces ont en commun la courbe de degré m donnée par les équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

courbe qui est l'*enveloppe* du faisceau. Soit un second faisceau φ^n, représenté par l'équation

$$pu + q = 0,$$

où p et q sont des fonctions de x, y, z de degré n; les surfaces qui, dans les deux faisceaux, sont données par la même valeur de u, sont dites *correspondantes*, et les faisceaux sont dits *homographiques*.

17. Théorème. *Étant donnés deux faisceaux φ^m, φ^n, les intersections des surfaces homographiques sont sur une surface de degré $m+n$.*

Démonstration. Comme au théorème 9.

18. Théorème. *Une surface de degré $m+n$ peut être, généralement parlant, engendrée par les intersections de deux faisceaux homographiques φ^m, φ^n.*

Démonstration. L'équation donnée de la surface de degré $m+n$ renferme

$$\frac{(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)}{1.2.3} - 1 = r \text{ coefficients};$$

l'équation

$$Pq - Qp = 0 \ (\textit{voir} \text{ ci-dessus})$$

renferme

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)+(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = s \text{ indéterm.}$$

Or $s > r$, on a donc plus d'indéterminées que d'équations.

Observation. Il peut arriver que sur la surface donnée on ne puisse tracer une ligne d'ordre m, ou d'ordre n; alors la question est impossible. Par exemple, soit

$$m = n = 1;$$

on voit qu'on peut construire une surface *réglée* du second degré par les intersections de deux faisceaux homographiques plans; mais il est évident que les surfaces du second degré non réglées ne sont pas susceptibles de cette génération.

19. *Définition : Polaires.* Si d'un point A, pris dans l'espace, on mène un cône tangent à une surface S^m, la ligne de contact est sur une surface S^{m-1} que l'on nomme *première polaire du point* A; la première polaire de A, par rapport à la surface S^{m-1}, est sur une surface S^{m-2} que l'on nomme *seconde polaire de* A, et ainsi de suite.

Observation. Soit

$$f(x, y, z, u) = 0$$

l'équation rendue homogène d'une surface S^m. a, b, c, d étant les coordonnées d'un point dans l'espace, si l'on développe, d'après le théorème de Taylor,

$$f(x+a, y+b, z+c, u+d),$$

le terme $p+1^{ième}$ de ce développement est

$$\frac{\left(\frac{a\,df}{dx} + \frac{b\,df}{dy} + \frac{c\,df}{dz} + \frac{d\,df}{du}\right)^p}{1.2.3\ldots p},$$

où il faut changer les exposants en indices différentiels; égalant cette expression à zéro, on a l'équation de la polaire d'ordre p, du point a, b, c, d relativement à la surface S^m.

20. Théorème. *Étant donné un point* A *dans l'espace, les surfaces polaires d'ordre* p, *pris par rapport aux surfaces du faisceau* φ^m, *forment un faisceau* φ^{m-p} *homographique au faisceau* φ^m.

Faisceau de surfaces; deux paramètres variables linéaires.

21. L'équation d'une surface de degré m à deux paramètres variables u, v prend la forme

$$Pu + Qv + R = 0,$$

P, Q, R étant des fonctions de degré m; donnant à u, v toutes les valeurs possibles, on obtient un faisceau φ_2^m où chaque surface passe par les m^3 points donnés par les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Deux surfaces prises dans deux faisceaux différents sont *homographiques* lorsqu'elles correspondent aux mêmes valeurs de u et de v.

22. Théorème. *Étant donnés trois faisceaux* φ_2^m, φ_2^n, φ_2^p; *trois surfaces correspondantes se coupent en* mnp *points, situés sur une surface de degré* $m + n + p$.

Démonstration.

$Pu + Qv + R = 0$, équation d'une surface S^m,

$P_1 u + Q_1 v + R_1 = 0$, équation d'une surface S^n correspond^{te}.,

$P_2 u + Q^2 v + R_2 = 0$, équation d'une surface S^p correspond^{te}.

Éliminant u et v, on a une équation de degré $m + n + p$.

Application.

$$m = n = p = 1, \quad m + n + p = 3;$$

ainsi une surface du troisième degré peut se construire par les intersections de trois faisceaux de plans homographiques.

Toutes les surfaces du faisceau φ_2^2 passent par les mêmes huit points, et les intersections de trois de ces faisceaux homographiques sont sur une surface du sixième degré.

Observation. Une surface du second degré et un plan forment un système du troisième degré.

23. Théorème. *Etant données n surfaces du faisceau* F^m; *par chacun des* m^3 *points communs, on peut mener n plans tangents, un à chaque surface; ces n plans se coupant suivant la même droite, forment un faisceau; les* m^3 *faisceaux sont homographiques.*

THÉORÈMES SUR LES COURBES GAUCHES (*);

Par M. F. FRENET,

Professeur au lycée de Lyon.

Dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales* (page 192), M. O. Bonnet a énoncé diverses propositions relatives aux courbes gauches, et indiqué la méthode par laquelle il les établit. Ces résultats peuvent s'obtenir un peu plus longuement peut-être, mais d'une manière très-simple aussi, au moyen de formules tirées d'un travail que j'ai remis à M. Liouville en 1847, et qu'il a eu la bonté d'insérer dans le tome XVII du *Journal de Mathématiques*. Ces formules, qui me paraissent propres à simplifier l'étude des courbes gauches, ne supposent pas un choix particulier d'axes, et introduisent

(*) Voir t. IV, p. 612; t. VI, p. 227; t. VIII, p. 239, 381; t. XI, p. 192.

dans les calculs une symétrie et des réductions qui les abrégent souvent beaucoup. Je me propose d'en faire l'application aux théorèmes de M. O. Bonnet.

1. Soient a, b, c les *cosinus déterminants* de la tangente au point M (x, y, z) d'une courbe gauche; λ, μ, ν, α, β, γ des quantités analogues pour la normale principale et l'axe du plan osculateur; ω l'angle de contingence; u celui de torsion. On connaît les relations qui lient $a, b, c, \lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$, auxquelles il faut joindre les suivantes :

$$\frac{da}{\lambda} = \frac{db}{\mu} = \frac{dc}{\nu} = \omega, \tag{1}$$

$$\frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\beta}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = -u. \tag{2}$$

Ces relations fournissent encore celles-ci :

$$(3)\begin{cases} \alpha\, da + \beta\, db + \gamma\, dc = 0, & \alpha\, d^2 a + \beta\, d^2 b + \gamma\, d^2 c = \omega u, \\ a\, d\alpha + b\, d\beta + c\, d\gamma = 0, & a\, d^2 \alpha + b\, d^2 \beta + c\, d^2 \gamma = \omega u. \end{cases}$$

Les coordonnées du point M′ voisin de M seront

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z,$$

et en désignant par ε l'arc MM′, on aura

$$\Delta x = a\varepsilon + \frac{da}{ds}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{d^2 a}{ds^2}\frac{\varepsilon^3}{6} + \ldots.$$

Comme l'arc MM′ est infiniment petit, on pourra poser plus brièvement

$$(4)\begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\varepsilon} = a + \dfrac{1}{2} da + \dfrac{1}{6} d^2 a + \ldots, \\ \text{on a de même} \\ \qquad \Delta a = da + \dfrac{1}{2} d^2 a + \ldots, \\ \qquad \Delta \alpha = d\alpha + \dfrac{1}{2} d^2 \alpha + \ldots, \end{cases}$$

et plusieurs autres équations semblables qu'il est inutile d'écrire.

De là et des formules (1), (2) et (3), on conclut

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha\Delta x + 6\Delta y + \gamma\Delta z = \frac{\varepsilon}{6}(\alpha d^2 a + 6 d^2 b + \gamma d^2 c) = \frac{1}{6} u\omega\, ds, \\ \alpha\Delta a + \ldots \qquad = \frac{1}{2}(\alpha d^2 a + \ldots \qquad) = \frac{1}{2} u\omega, \\ a\Delta\alpha + \ldots \qquad = \frac{1}{2}(a d^2\alpha + \ldots \qquad) = \frac{1}{2} u\omega. \end{cases}$$

2. *Direction et grandeur de la plus courte distance des tangentes en* M *et en* M'. En général, on peut obtenir, pour ainsi dire sans calcul, la direction et la grandeur de la plus courte distance δ de deux droites D et D_1. Soient, en effet, a, b, c, p, q, r les cosinus déterminants et les coordonnées d'un point de D; a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1, les quantités analogues pour D_1; υ l'angle de ces droites : les cosinus qui définissent la direction de δ sont, d'après des formules connues,

$$\frac{bc_1 - cb_1}{\sin\upsilon}, \quad \frac{ca_1 - ac_1}{\sin\upsilon}, \quad \frac{ab_1 - ba_1}{\sin\upsilon}.$$

Désignons par h la distance du point (p, q, r) au point (p_1, q_1, r_1); $\frac{p-p_1}{h}$, $\frac{q-q_1}{h}$, $\frac{r-r_1}{h}$ représentent les cosinus déterminants de la direction de h; d'ailleurs, si φ est l'angle des directions de h et de δ, on a

$$\delta = h\cos\varphi,$$

et comme

$$\cos\varphi = \frac{p-p_1}{h}\,\frac{(bc_1 - cb_1)}{\sin\upsilon} + \ldots,$$

il en résulte

$$\delta = \frac{(p-p_1)(bc_1-cb_1)+(q-q_1)(ca_1-ac_1)+(r-r_1)(ab_1-ba_1)}{\sin\upsilon},$$

Ce calcul est trop simple sans doute pour n'être pas connu, mais je le donne ici parce qu'il ne me paraît pas répandu dans l'enseignement (*).

Si les droites sont les tangentes en M et M', on a

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\omega}\left[\frac{\Delta x}{\varepsilon}(b\,\Delta c - c\,\Delta b) + \ldots\right];$$

en tenant compte des relations (4), la grande parenthèse devient

$$\left(a + \frac{1}{2}da + \frac{1}{6}d^2 a + \ldots\right)(b\,\Delta c - c\,\Delta b) + \ldots,$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(da + \frac{1}{3}d^2 a + \ldots\right)(b\,\Delta c - c\,\Delta b) + \ldots;$$

d'ailleurs

$$(b\,\Delta c - c\,\Delta b) = (bdc - cdb) + \frac{1}{2}(bd^2c - cd^2b),$$

en se bornant aux termes du second ordre. Mais

$$bdc - cdb = \alpha\omega,$$

à cause des formules (1); l'expression qui nous occupe devient donc

$$\frac{1}{2}\left(da + \frac{1}{3}d^2a + \ldots\right)\left[\alpha\omega + \frac{1}{2}d(\alpha\omega)\right] + \ldots.$$

En développant la différentielle indiquée et négligeant les termes d'un ordre supérieur au troisième, il vient [formules (1), (2) et (5)]

$$\frac{1}{4}\omega(d\alpha\, da + \ldots) + \frac{1}{6}\omega(\alpha\, d^2a + \ldots) = -\frac{1}{12}\omega^2 u.$$

La valeur absolue de δ est donc $\frac{1}{12}\omega\, u\, ds$.

(*) Si les droites D et D_1 sont parallèles, que devient δ?

3. *Angle de la perpendiculaire commune aux deux tangentes avec le plan osculateur.* Les cosinus déterminants de la perpendiculaire commune sont (n° 2)

$$\frac{b\Delta c - c\Delta b}{\omega}, \quad \frac{c\Delta a - a\Delta c}{\omega}, \quad \frac{a\Delta b - b\Delta a}{\omega},$$

et le sinus de l'angle cherché ou l'angle lui-même est le cosinus de l'angle de cette direction avec celle de la normale principale; l'angle cherché est donc

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda(b\Delta c - c\Delta b)}{\omega} + \ldots &= \frac{\Delta a(\mu c - \nu b)}{\omega} + \ldots\\ &= \frac{\alpha\Delta a + \ldots}{\omega} = \frac{1}{2}u\end{aligned}\right\}\text{[formule (5)].}$$

4. *Angle de la tangente en* M′ *et du plan osculateur en* M. Le sinus de cet angle ou l'angle lui-même a pour expression

$$\alpha(a + \Delta a) + \ldots = \alpha\Delta a + \ldots = \frac{1}{2}u\omega.$$

5. *Angle de la corde* MM′ *avec le plan osculateur en* M. σ étant la longueur de cette corde, la valeur de l'angle cherché est

$$\alpha\frac{\Delta x}{\sigma} + 6\frac{\Delta y}{\sigma} + \gamma\frac{\Delta z}{\sigma} = \frac{1}{6}u\omega \text{ [formule (5)].}$$

On déduit de là que la distance de M′ au plan osculateur est $\frac{1}{6}u\omega\,ds$, résultat qui se tire d'ailleurs immédiatement de la formule qui donne la distance d'un point à un plan.

6. *Angle du plan osculateur avec le plan* P *mené par la tangente et le point* M′. L'axe du plan P est perpendiculaire à la tangente (a, b, c) et à la corde MM′ $\left(\frac{\Delta x}{\sigma}, \frac{\Delta y}{\sigma}, \frac{\Delta z}{\sigma}\right)$: d'ailleurs, l'angle de cette corde

avec la tangente est, comme on sait, égal à $\frac{\omega}{2}$; donc les cosinus déterminants de l'axe du plan P sont

$$\frac{b\,\Delta z - c\,\Delta y}{\frac{1}{2}\omega\sigma}, \ \ldots;$$

et comme cet axe est dans le plan normal, l'angle cherché est

$$\frac{2}{\omega}\left[\lambda\left(b\,\frac{\Delta z}{\varepsilon} - c\,\frac{\Delta y}{\varepsilon}\right) + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{2}{\omega}\left[\frac{\Delta x}{\varepsilon}(\mu c - \nu b) + \ldots\right] = \frac{2}{\omega}\left(\frac{\alpha\,\Delta x + \ldots}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{3}u.$$

7. *Angle de la tangente avec l'intersection* I *des deux plans osculateurs en* M *et en* M'. Cette intersection est perpendiculaire aux axes des plans qui la contiennent, et comme u est l'angle de ces axes, les cosinus déterminants de la direction I sont

$$\frac{\beta\,\Delta\gamma - \gamma\,\Delta\beta}{u}, \ldots$$

L'angle cherché est le cosinus de l'angle que fait I avec la normale principale, et a pour valeur

$$\frac{\lambda(\beta\,\Delta\gamma - \gamma\,\Delta\beta)}{u} + \ldots = \frac{\Delta\alpha(\mu\gamma - \nu\beta)}{u} + \ldots$$
$$= -\frac{a\,\Delta\alpha + \ldots}{u} = -\frac{1}{2}\omega.$$

8. *Distance du point* M *au point de rencontre de la tangente avec la droite* I. Les équations de la droite I sont

$$(X - x)\alpha + \ldots = 0, \quad (X - x - \Delta x)(\alpha + \Delta\alpha) + \ldots = 0,$$

ou bien

$$(X - x)\alpha + \ldots = 0, \quad (X - x)\Delta\alpha + \ldots = \alpha\,\Delta x + \ldots.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées du point de rencontre de I avec la tangente, et l la distance cherchée; on a

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}=l,$$

et, par suite,

$$l(a\Delta\alpha+b\Delta6+c\Delta\gamma)=\alpha\Delta x+\ldots;$$

d'où

$$l=\frac{1}{3}ds.$$

9. *Distance du point* M *à la droite* I. Cette distance s'obtient en multipliant la quantité l que nous venons de trouver par l'angle calculé au n° 7. On trouve ainsi $\frac{1}{3}\omega ds$ pour la valeur absolue de la distance cherchée.

10. On voit sans peine qu'on peut se poser une foule de questions de la nature de celles qui sont résolues ici, et qui se traiteraient par des procédés tout à fait semblables. On arriverait, par exemple, entre autres résultats, à cette proposition souvent utile : *La différence entre l'arc et la corde est un infiniment petit du troisième ordre, et sa valeur est* $\frac{1}{24}\omega^2 ds$.

11. Je termine par la démonstration des formules (2). Je les ai obtenues d'abord par la Géométrie, mais on peut y arriver en adoptant une marche purement analytique, comme il suit. On a

$$u^2=d\alpha^2+d6^2+d\gamma^2=(6d\gamma-\gamma d6)^2$$
$$+(\gamma d\alpha-\alpha d\gamma)^2+(\alpha d6-6d\alpha)^2.$$

Or, de $\alpha=\mu c-\nu b$ on tire

$$d\alpha=d\mu.c-d\nu.b;$$

car $\mu dc-\nu db=0$ à cause des formules (1).

On aurait de même

$$d\beta = d\nu . a - d\lambda . c, \quad d\gamma = \ldots;$$

par suite,

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha d\beta - \beta d\alpha = a\alpha d\nu - \alpha c d\lambda - \beta c d\mu + \beta b d\nu \\ \qquad = -c(\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu). \end{cases}$$

Les binômes $\beta d\gamma - \gamma d\beta$, $\gamma d\alpha - \alpha d\gamma$ s'obtiendraient d'une manière analogue. On a donc

$$u^2 = (\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu)^2,$$

et

$$(7) \qquad u = \pm(\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu).$$

En adoptant le signe $+$, cette formule revient à celle qu'on donne ordinairement; mais alors u est susceptible de signe, et, en mettant sa valeur sous la forme

$$a(\lambda + d\lambda) + b(\mu + d\mu) + c(\nu + d\nu),$$

on reconnaît qu'elle est positive lorsque la normale principale au point M′ fait un angle aigu avec *la partie positive* de l'axe du plan osculateur; elle serait négative si cet angle était obtus.

Observons maintenant que nous pouvons écrire, en vertu des équations (6) et (7),

$$\alpha \frac{d\beta}{u} - \beta \frac{d\alpha}{u} = -c,$$

$$\gamma \frac{d\alpha}{u} - \alpha \frac{d\gamma}{u} = -b,$$

$$\beta \frac{d\gamma}{u} - \gamma \frac{d\beta}{u} = -a;$$

et, en rapprochant ces relations des suivantes,

$$\alpha\mu - \beta\nu = c, \quad \gamma\lambda - \alpha\nu = b, \quad \beta\nu - \gamma\mu = a,$$

on en déduit les égalités (2).

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1845;

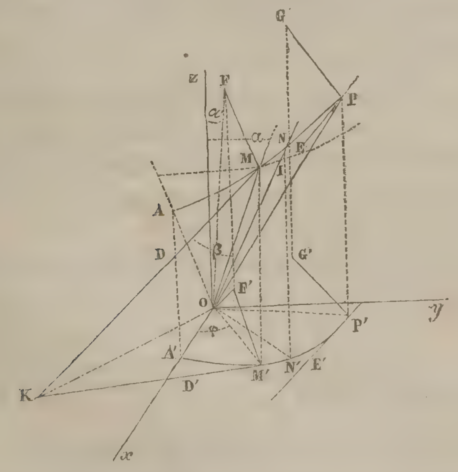
PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Déterminer la courbe qui coupe sous un angle constant les génératrices d'un cône de révolution, et qui passe par deux points A_0, A_1 *donnés sur ce cône. Longueur d'un arc. Aire de la portion de surface conique comprise entre un arc et les droites menées de ses extrémités au sommet du cône. Transformée plane. Plan osculateur. Rayon et centre de courbure. Lieu des centres de courbure.*

Nous désignerons la courbe dont il s'agit par le nom d'*hélice conique* (*voir* la note I, page 388).



1. Si un point m décrivait l'hélice en s'éloignant du sommet O du cône, à partir d'un point A de cette courbe,

un point m' qui décrirait simultanément la projection de l'hélice sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône et passant par le sommet, en coïncidant toujours avec la projection de m sur ce plan, tournerait autour du sommet O dans un sens déterminé, facile à reconnaître d'après la position des points donnés A_0, A_1, et qui va nous servir à fixer le sens de nos notations.

Les axes rectangulaires, que nous emploierons concurremment avec des coordonnées polaires, seront : Ox, la direction de Om' quand m part du point A ; Oy, la direction que prend la ligne Om', de longueur variable, après avoir tourné de 90 degrés autour du point O ; et Oz, l'axe du cône (on ne considère qu'une des nappes de cette surface).

De plus, soient :

φ l'angle, positif des Ox vers Oy et négatif dans le sens opposé, qui aura été décrit par Om' sur $\widehat{xy}$ lorsque m sera parvenu sur l'hélice au point quelconque M ;

r la distance Om, et r' sa projection OM' sur $\widehat{xy}$;

$\varphi + d\varphi$, $r + dr$ et $r' + dr'$ ce que deviennent φ, r et r quand m a décrit encore un arc infiniment petit MN de l'hélice, en continuant de se mouvoir dans le même sens que de A en M ;

ds l'arc MN considéré comme étant de même signe que φ et $d\varphi$;

β l'angle constant, que l'on peut supposer inférieur à 90 degrés, sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cône ;

α le demi-angle au sommet du cône.

La génératrice ON, en coupant le parallèle du cône qui passe par le point M, forme avec ce parallèle et avec l'hé-

lice un *triangle conique* MIN, dont les côtés sont égaux à $\pm dr$, $\pm r' d\varphi$ et $\pm ds$, les signes supérieurs répondant à $\varphi > 0$, et les signes inférieurs à $\varphi < 0$; aux infiniment petits du second ordre près, ce triangle conique doit être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en I, et ayant en N un angle égal à β; donc on a

(1) $$dr = r' d\varphi . \cot \beta \quad \text{et} \quad dr = ds . \cos \beta.$$

Le triangle OM′M fournit d'ailleurs

$$r' = r \sin \alpha;$$

et, par conséquent, la première des équations précédentes devient

(2) $$dr = r d\varphi . \sin \alpha \cot \beta,$$

dont l'intégrale est

(3) $$r = C . e^{\varphi \sin \alpha \cot \beta},$$

e désignant la base des logarithmes népériens, et C une ligne qu'il faut déterminer ainsi que l'angle β, de manière que l'hélice passe par les points donnés A_0, A_1.

L'équation (3) suffit pour représenter l'hélice en coordonnées polaires, parce que le rayon vecteur r fait constamment avec Oz l'angle α, ce qui rend inutile l'introduction d'une troisième coordonnée.

Pour déterminer C et β, on a

$$r_0 = C e^{\varphi_0 \sin \alpha \cot \beta} \quad \text{et} \quad r_1 = C e^{\varphi_1 \sin \alpha \cot \beta},$$

en désignant par φ_0, r_0 et φ_1, r_1, les valeurs de φ et r qui répondent aux points A_0, A_1; et l'on déduit de ces équations

$$\tang \beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{lr_1 - lr_0} . \sin \alpha, \qquad C = r_0^{\frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0}} . r_1^{-\frac{\varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0}}.$$

La première de ces formules ne fournit pour β une valeur inférieure à $\frac{\pi}{2}$, lorsque $r_1 > r_0$ (ce qu'on peut toujours

admettre, puisque A_1 désigne celui des points donnés que l'on veut), que si $\varphi_1 > \varphi_0$; or, cela dépend du sens dans lequel φ est positif, et la condition $\varphi_1 > \varphi_0$, pour $r_1 > r_0$, détermine précisément ce sens de la manière convenue plus haut.

Nous conserverons les lettres β et C dans le reste du calcul, en supposant qu'elles représentent les valeurs déterminées par les formules qui précèdent.

L'équation polaire de la projection de l'hélice sur $\widehat{xy}$ (pôle O, axe Ox) s'obtient en substituant $\frac{r'}{\sin\alpha}$ à r dans l'équation (3), ce qui donne

$$(4) \qquad r' = C \sin\alpha \,.\, e^{\varphi \sin\alpha \cot\beta};$$

on voit donc que :

La projection de l'hélice conique sur tout plan perpendiculaire à l'axe du cône est une spirale logarithmique.

2. On peut arriver directement à la conclusion qui précède, former premièrement l'équation (4), et en déduire l'équation (3). Pour cela, soient :

P un point quelconque de l'hélice, différent de M;

P' la projection de P sur $\widehat{xy}$;

MD et PE les tangentes à l'hélice en M et P;

M'D' et P'E' les projections de ces tangentes sur $\widehat{xy}$.

Si l'on fait tourner le plan OPE autour de Oz, lorsque OP sera dans la direction de OM, ce plan coïncidera avec le plan OMD, puisqu'ils touchent tous deux le cône, l'un suivant OP, l'autre suivant OM; et, pourvu que le sens de la rotation soit convenable, PE sera alors parallèle à OM, car les angles OPE, OMD, devenus correspondants, sont égaux. Cela posé, concevons que les projections de OP et de PE suivent le mouvement de ces droites; OP' sera dans la direction de OM' en même temps que OP

dans celle de OM, et P′E′ sera alors parallèle à M′D′, puisque PE est parallèle à MD, ainsi qu'il vient d'être dit; l'angle OP′E′ est donc égal à OM′D′, car le premier est devenu correspondant au second par l'effet seul de la rotation. Or ce raisonnement prouve bien que la projection de l'hélice conique sur $\widehat{xy}$ est une spirale logarithmique, puisque la propriété essentielle de ce genre de spirales est de couper tous les rayons vecteurs sous un angle constant.

Afin d'avoir la cotangente de l'angle OM′D′, qu'il faut connaître pour écrire l'équation de la spirale, il suffit de remarquer que MD et M′D′ se rencontrent en un point K de la trace du plan OMD sur $\widehat{xy}$, et que les triangles MOK, M′OK sont rectangles en O; en effet, il résulte de là que

$$\cot OM'D' : \cot OMD, \quad \text{ou} \quad \cot\beta :: r' : r, \quad \text{ou} \quad :: \sin\alpha : 1,$$

d'où

$$\cot OM'D' = \sin\alpha \cot\beta.$$

D'après cela, la spirale peut être représentée par l'équation (4).

Lorsque l'on considère avec un peu de soin la rotation qui vient d'être indiquée, on voit que l'angle P′PE est égal à M′MD, car les côtés de ces angles deviennent parallèles chacun à chacun; ainsi :

L'hélice conique coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre parallèle à l'axe du cône qui la projette sur $\widehat{xy}$.

Le cosinus de l'angle constant, qui est M′MD pour le point M, s'obtient facilement; en effet, les triangles rectangles KM′M, OM′M et KOM donnent

$$\cos M'MD = \frac{MM'}{MK}, \quad MM' = r\cos\alpha \quad \text{et} \quad MK = \frac{r}{\cos\beta},$$

d'où

$$\cos M'MD = \cos\alpha \cos\beta.$$

Cette propriété de l'hélice conique est très-remarquable; on verra plus loin comment on en déduit la direction du rayon de courbure et le plan osculateur.

3. *Longueur d'un arc.* b et b_1 étant les rayons vecteurs des extrémités d'un arc BB_1 de l'hélice, la seconde des équations (1) donne, en intégrant de $r = b$ jusqu'à $r = b_1$,

$$(5) \qquad \text{arc } BB_1 = \frac{b_1 - b}{\cos\beta},$$

si l'on suppose $b_1 > b$; donc *la longueur d'un arc quelconque de l'hélice conique est représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est la différence des rayons vecteurs des extrémités de cet arc, et dans lequel l'angle aigu adjacent à ce côté est égal à* β.

On pourrait aussi déduire la longueur de l'arc BB_1 de celle de l'arc $B'B'_1$ de spirale logarithmique, qui est la projection de BB_1 sur $\widehat{xy}$; car, en désignant par ds' l'élément $M'N'$ considéré comme de même signe que $d\varphi$, on a évidemment

$$ds = \frac{ds'}{\sin M'MD}$$

à un infiniment petit d'un ordre supérieur près, et puisque $M'MD$ est un angle constant,

$$\text{arc } BB_1 = \frac{\text{arc } B'B'_1}{\sin M'MD}.$$

4. *Aire du fuseau conique défini dans l'énoncé.* La surface du triangle conique MIN est infiniment petite par rapport à celle du fuseau MON, car MIN est moindre que le quadrilatère MINI' dont l'aire est exprimée par

$\left(r + \frac{dr}{2}\right) dr\, d\varphi . \sin\alpha$, tandis que MON surpasse MOI dont l'aire est exprimée par $\frac{1}{2} r^2 d\varphi . \sin\alpha$. Si l'on désigne par *du* le fuseau MON considéré comme de même signe que φ, on a donc

$$(6) \qquad du = \frac{1}{2} r^2 d\varphi . \sin\alpha$$

à un infiniment petit d'un ordre supérieur près, et, en remplaçant $d\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$du = \frac{1}{2} r dr . \text{tang}\, \beta.$$

Or cette équation donne, en intégrant de $r = b$ jusqu'à $r = b_1$, et dans l'hypothèse que $b_1 > b$,

$$\text{fus. BOB}_1 = \frac{b_1^2 - b^2}{4} . \text{tang}\, \beta.$$

On pourrait encore déduire la valeur du fuseau BOB_1 de celle du secteur $\text{B}'\text{OB}'_1$ de la spirale logarithmique, car on voit facilement que fus. $\text{BOB}_1 = \frac{\text{sect. B}'\text{OB}'_1}{\sin\alpha}$.

5. *Transformée plane.* Le cône étant posé sur un plan fixe, de manière qu'il touche ce plan suivant une génératrice, si on le fait rouler sans glisser, le lieu des points du plan sur lesquels viennent successivement se mettre ceux de l'hélice conique est la transformée plane de cette courbe.

On voit sans peine qu'une tangente MD à l'hélice, entraînée dans le mouvement du cône, se confondra avec la tangente à la transformée au point μ correspondant à M, en même temps que OM se placera sur $\text{O}\mu$, et sans que l'angle OMD change de grandeur (le sommet O du cône

ne se déplace pas sur le plan, parce qu'il n'y a pas de glissement); donc :

La transformée plane de l'hélice conique est une spirale logarithmique qui coupe ses rayons vecteurs sous l'angle β.

D'après cela, si O' est la position du sommet du cône sur le plan, et O'A' la droite sur laquelle se place la génératrice OA (1), en prenant O' pour pôle, O'A' pour axe polaire, et désignant par ψ l'angle $A'O'\mu$ considéré comme de même signe que φ, ce qui revient à poser $\varphi \sin \alpha = \psi$, l'équation de la transformée est

$$r = C \cdot e^{\psi \cdot \cot \beta}.$$

6. *Plan osculateur.* Lorsque l'équation $\frac{dz}{ds} =$ const. est vérifiée pour tous les points d'une courbe, c'est-à-dire quand cette courbe coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette sur $\widehat{xy}$; la formule connue $\cos \nu = \rho . D_s \frac{dz}{ds}$ du cosinus de l'angle ν que le rayon vecteur ρ correspondant au point quelconque (x, y, z) de la courbe fait avec l'axe des z, donne

$$\cos \nu = 0, \quad \text{d'où} \quad \nu = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, 1° *le rayon de courbure est parallèle à* $\widehat{xy}$, *et dirigé suivant la trace du plan normal dans lequel il est compris, sur le plan parallèle à* $\widehat{xy}$ *conduit par le point* (x, y, z), *de sorte qu'il est perpendiculaire au plan qui touche en ce point le cylindre projetant;* 2° comme le plan osculateur est, en général, déterminé par la tangente et par la direction du rayon de courbure, *le plan osculateur en* (x, y, z) *à une courbe qui remplit la condition exprimée par l'équation* $\frac{dz}{ds} =$ const., *est le plan con-*

duit suivant la tangente à cette courbe perpendiculairement au plan qui touche en (x, y, z) *le cylindre projetant.* Enfin, on voit encore sans difficulté que la trace du plan osculateur sur $\widehat{xy}$ est perpendiculaire à la projection de la tangente, et l'on conclut de là que l'inclinaison du premier plan sur le second est égale à l'inclinaison de la tangente sur celui-ci.

Or, en vertu de la remarque qui termine l'art. 2, tout ce que nous venons de dire s'applique à l'hélice conique, et fournit en descriptive une construction très-simple du plan osculateur, dont l'inclinaison constante sur $\widehat{xy}$, représentée par M′KM pour le point M, est d'ailleurs donnée par la formule $\sin M'KM = \cos\alpha \cos\beta$, d'après la valeur qui a été obtenue pour $\cos M'MD$ (2). On pourrait même arriver, par ces seules considérations, à l'équation du plan osculateur; mais, à cause d'une ambiguïté de signes assez difficile à écarter, il est préférable de suivre pour cela les principes généraux.

Les coordonnées rectangulaires du point M sont exprimées par $r \sin\alpha \cos\varphi$, $r \sin\alpha \sin\varphi$ et $r\cos\alpha$, de sorte que l'équation du plan osculateur est de la forme

$$A(x - r\sin\alpha\cos\varphi) + B(y - r\sin\alpha\sin\varphi) + z - r\cos\alpha = 0,$$

x, y, z désignant les coordonnées de ce plan, et A, B des fonctions inconnues de φ et r. Pour déterminer A et B, on doit différentier deux fois cette équation par rapport à φ et r, en regardant x, y, z comme des constantes, ce qui donne d'abord

$$A(\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta\cos\varphi) - B(\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta\sin\varphi) \\ - \cos\alpha\cot\beta = 0,$$

après qu'on a remplacé $\frac{dr}{d\varphi}$ par sa valeur tirée de l'équa-

tion (2) et supprimé le facteur $r \sin \alpha$, puis

$$A(\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta\sin\varphi) + B(\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta\cos\varphi) = 0.$$

En tirant de ces deux équations les valeurs de A et B, et en substituant ces valeurs dans la précédente, on obtient

$$(\text{O}) \left\{ \begin{aligned} &(\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta.\cos\varphi)\,x - (\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta.\sin\varphi)\,y \\ &\qquad + \frac{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}.\,z = r\,\text{tang}\,\beta. \end{aligned} \right.$$

Si l'on remarque que le coefficient angulaire $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ de la projection de la tangente en M sur $\widehat{xy}$ est

$$\text{tang}(\varphi + \text{OM}'\text{D}') = -\frac{\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta.\sin\varphi}{\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta.\cos\varphi},$$

on vérifie sans peine, d'après l'équation (O), et par rapport à l'hélice conique, ce qui a été établi au début de cet article relativement au plan osculateur de toute courbe qui coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre projetant sur $\widehat{xy}$; on trouve aussi que le sinus de l'inclinaison du plan osculateur de l'hélice sur $\widehat{xy}$ est exprimé par $\cos\alpha.\cos\beta$; enfin, on peut remarquer que le z à l'origine est proportionnel au rayon vecteur r.

7. *Rayon de courbure.* Nous avons fixé d'une manière générale, au commencement de l'article qui précède, la direction du rayon de courbure des courbes qui satisfont à l'équation $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$, et, par conséquent, celle du rayon de courbure de l'hélice conique; nous remarquerons seulement encore que la projection de ce rayon sur $\widehat{xy}$ tombe dans la direction de celui de la spirale logarithmique suivant laquelle l'hélice se projette sur ce plan.

Pour avoir la direction du rayon de courbure de l'hélice en un point M de cette courbe, dont la projection sur $\widehat{xy}$ est M', on mènera donc la normale en M' à la spirale logarithmique (*).

Afin de déterminer la grandeur du rayon de courbure, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Les rayons de courbure de toute courbe qui satisfait à l'équation $\frac{dz}{ds} =$ const. *sont proportionnels à ceux de sa projection sur* $\widehat{xy}$.

En suivant toujours les notations qui ont été adoptées, une formule connue donne

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

car $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ d'après l'hypothèse ; et l'on a d'ailleurs

$$\rho' = \left[\left(\frac{d^2x}{ds'^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds'^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$ds' = kds,$$

si l'on désigne par ρ', ds' et k le rayon de courbure de la projection au point (x, y), l'élément correspondant ds' de cette courbe, et la valeur constante du cosinus de l'inclinaison sur $\widehat{xy}$ de la tangente en (x, y, z) à la courbe à double courbure. Or, en remplaçant ds' par kds dans l'expression de ρ', et en comparant le résultat avec l'expression de ρ, on a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k^2},$$

C. Q. F. P.

(*) En descriptive, on obtient la direction de M'D' par la construction

[Nous avons cru devoir établir cette proposition avec toute l'étendue qu'elle comporte, comme nous l'avons fait pour celles qui précèdent et qui sont relatives au plan osculateur ainsi qu'au rayon de courbure.]

D'après cela, ρ représentant maintenant le rayon de courbure de l'hélice conique, on obtient de suite

$$(\rho) \qquad \rho = \frac{r \sin \alpha}{\sin \beta . \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}};$$

car on a pour la spirale logarithmique,

$$\rho' = \frac{r'}{\sin \mathrm{OM'K}} \quad \text{(formule connue)},$$

et, d'autre part, $r' = r \sin \alpha$,

$$\sin \mathrm{OM'K} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \cot^2 \beta}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

enfin

$$k^2 = 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (\mathbf{1} \text{ et } \mathbf{2}).$$

Ainsi,

Le rapport $\frac{\rho}{r}$ *du rayon de courbure au rayon vecteur de l'hélice conique est constant.*

Mais, pour construire géométriquement le rayon de courbure en M, il convient de prendre

$$\rho = \frac{\mathrm{OM'} . \overline{\mathrm{MK}}^2}{\mathrm{OK} . \mathrm{M'K}},$$

qu'on déduit aussi de

$$\rho = \frac{\rho'}{k^2} \quad \text{et de} \quad \rho' = \frac{\mathrm{OM'}}{\sin \mathrm{OM'K}},$$

---

du point K : OK est perpendiculaire à OM', et l'on a sa longueur, en décrivant un triangle égal à OMK dans lequel on connaît le côté OM et l'angle adjacent OMK $= \beta$.

en remarquant que

$$\sin \mathrm{OM'K} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{M'K}} \quad \text{et} \quad k = \sin \mathrm{M'MK} = \frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{MK}}.$$

Les coordonnées du centre de courbure dépendent de l'équation (O) du plan osculateur, de l'équation du plan normal,

$$(\mathrm{N}) \left\{ \begin{array}{l} (\sin\varphi - \sin\alpha \cot\beta \cos\varphi)\, x \\ -(\cos\varphi + \sin\alpha \cot\beta \sin\varphi)\, y - \cos\alpha \cot\beta \,.\, z + r \cot\beta = 0, \end{array} \right.$$

et de

$$(\mathrm{N'}) \left\{ \begin{array}{l} (\cos\varphi + \sin\alpha \cot\beta \sin\varphi)\, x \\ +(\sin\varphi - \sin\alpha \cot\beta \cos\varphi)\, y + r \sin\alpha \cot^2\beta = 0, \end{array} \right.$$

que l'on déduit de la précédente en la différentiant par rapport à φ et r, puis en remplaçant $\frac{dr}{d\varphi}$ par sa valeur tirée de l'équation (2). Les valeurs de x, y, z, qui satisfont à ces trois équations, sont assez compliquées, et il n'est pas nécessaire de les employer pour former l'expression du rayon de courbure : on voit en effet, avec un peu d'attention, que le plan (N′) est perpendiculaire aux traces des deux autres plans sur $\widehat{xy}$, par conséquent, au rayon de courbure; et qu'ainsi ce rayon est la distance de M au plan (N′), ou de M′ à la trace de ce plan sur $\widehat{xy}$, de sorte qu'on peut l'obtenir par la formule de la distance d'un point à une droite (en géométrie plane), en considérant seulement l'équation (N′).

8. *Lieu des centres de courbure.* Soient F et G les centres de courbure qui répondent aux points M et P de l'hélice conique. Si l'on fait tourner autour de Oz, de la manière indiquée dans l'art. 2, la génératrice OP, le plan OPE qui touche le cône suivant OP, et le rayon de courbure PG; PG sera parallèle à MF lorsque le plan

OPE coïncidera avec OMD, qui touche le cône suivant OM, car PG reste perpendiculaire à OPE, et MF est perpendiculaire à OMD : ainsi l'angle OPG = OMF. Comme on a d'ailleurs (7) $\frac{PG}{OP} = \frac{MF}{OM}$, les triangles POG, MOF sont semblables ; de sorte que OG sera dirigé suivant OF, après la rotation, et que l'angle GOz = FOz, puisque GOz ne varie pas pendant que OG tourne autour de Oz. Donc *les points* F, G,..., *sont sur un cône de révolution, dont* Oz *est l'axe et* O *le sommet.* D'autre part, F' étant la projection de F sur $\widehat{xy}$, l'angle en M' du triangle F'OM' est complémentaire de l'angle constant OM'D', et le rapport $\frac{M'F'}{MO}$, ou $\frac{\rho}{r'}$ des côtés qui comprennent cet angle est aussi constant (7) ; par conséquent, il en est de même de l'angle F'OM', ainsi que du rapport $\frac{OF'}{OM'}$, c'est-à-dire que cet angle et ce rapport ne varient pas avec la position du point M' sur la spirale logarithmique. Donc, *le lieu des points* M',..., *est une spirale semblable à la projection de l'hélice sur* $\widehat{xy}$. Or, il résulte évidemment de là, d'après ce qui a été dit dans les art. 1 et 2, que

Le lieu des centres de courbure de l'hélice conique est une autre hélice de même espèce, située sur un cône de même axe et de même sommet.

Si l'on désigne par γ et λ les angles M' et O du triangle F'OM', on a

$$\frac{\sin(\gamma+\lambda)}{\sin\lambda}, \quad \text{ou} \quad \cos\gamma + \sin\gamma\cot\lambda = \frac{r'}{\rho};$$

en remplaçant $\sin\gamma$ ainsi que $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées de $\tan\gamma = \sin\alpha\cot\beta$, et $\frac{r'}{\rho} = \frac{r\sin\alpha}{\rho}$ par sa valeur

tirée de la formule (ρ), il vient

$$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta}.$$

Nous supposerons, dans ce qui suit, que λ représente l'arc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π qui est déterminé par cette formule.

Soient encore ψ et R' les coordonnées polaires du point F'. On a évidemment

$$\varphi = \psi - \lambda,$$

et le triangle $F'OM'$ donne

$$r' = R'\frac{\sin(\gamma+\lambda)}{\sin\gamma} = R'(\cos\lambda + \sin\lambda\cot\gamma),$$

ce qui devient

$$r' = R'\operatorname{tang}\beta\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{1-\cos^2\alpha\sin^2\beta}},$$

après quelques réductions, en remplaçant $\sin\lambda$, $\cos\lambda$ par leurs valeurs tirées de celle de $\operatorname{tang}\lambda$ et $\cot\gamma$ par $\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\alpha}$. Il n'y a plus maintenant qu'à porter ces valeurs de φ et r' dans l'équation (4) pour avoir l'équation polaire de la projection sur $\widehat{xy}$ du lieu des centres de courbure; on obtient ainsi

$$R' = C\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\beta}\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}\cdot e^{(\psi-\lambda)\sin\alpha\cot\beta}.$$

Enfin, α' étant le demi-angle au sommet du cône sur lequel se trouve le lieu des centres de courbure, β' l'angle constant sous lequel cette courbe coupe les génératrices

de ce cône, et R le rayon vecteur du point F, on a

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{R' \operatorname{tang} \alpha}{r'} = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

$$\operatorname{tang} \beta' = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \operatorname{tang} \beta,$$

et

$$R = C \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot e^{(\psi - \lambda) \sin \alpha \cot \beta};$$

cette dernière équation est l'équation polaire (dans l'espace) du lieu des centres de courbure. Tout cela peut d'ailleurs être déduit des équations (O), (N) et (N').

Notes.

I. L'hélice conique, comme l'hélice dont on trouve la monographie dans les Traités de calcul différentiel, appartient à la classe fort remarquable des courbes qui coupent sous un angle constant les méridiennes d'une surface de révolution, et qu'on nomme, en général, des *loxodromies*.

Si l'on convient de désigner par r l'arc de méridienne OM compris entre le sommet O d'une surface de révolution quelconque, et le point M d'une loxodromie tracée sur cette surface, par r' la distance de M à l'axe Oz, qui est l'ordonnée de la méridienne en prenant Oz pour axe des abscisses, et de conserver le reste des notations expliquées dans l'art. 1, on voit immédiatement que les équations (1) conviennent à toute loxodromie.

Les variables φ et r forment un système particulier de coordonnées dont l'une s'exprime en fonction de l'autre par une simple quadrature, lorsqu'on a r' en fonction de r. Ainsi, par exemple, sur une sphère de rayon égal à l'unité de longueur,

$$r' = \sin r,$$

et la première des équations (1) donne

$$d\varphi = \frac{dr}{\sin r}\cdot \text{tang}\,\beta,$$

d'où

$$\varphi = \text{const} + \text{tang}\,\beta\,.\,l\left(\text{tang}\,\frac{r}{2}\right).$$

On déduit toujours la formule (5) de la seconde des équations (1), et, par conséquent, *la rectification d'un arc* BB_1 *de loxodromie ne dépend que de celle de l'arc de la méridienne compris entre les parallèles de la surface qui passent par les points* B *et* B_1.

II. Comme l'hélice conique coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette parallèlement à l'axe du cône, nous avons pu nous servir de quelques propriétés qui appartiennent, en général, aux hélices cylindriques dont l'hélice qu'on étudie ordinairement n'est qu'un cas particulier. Voici l'énoncé du théorème sur lequel nous nous sommes appuyés :

Le rayon de courbure d'une hélice cylindrique a, en chaque point, la même direction que le rayon de courbure de la section droite du cylindre, et ces deux rayons sont dans un rapport constant.

La réciproque de la première partie est vraie.

On déduit de ce théorème le corollaire suivant :

Le plan osculateur d'une hélice cylindrique est en chaque point perpendiculaire au plan qui touche le cylindre, et réciproquement.

III. *Le lieu des traces des tangentes à l'hélice conique sur le plan* $\widehat{xy}$ *est une spirale semblable à la projection de l'hélice sur ce plan, et ce lieu est l'enveloppe de la trace du plan osculateur.*

En effet :

1°. L'angle $M'OK$ est toujours droit, et l'on a

$$\frac{OK}{r'} = \tang OM'K = \text{const.}$$

2°. La trace sur $\widehat{xy}$ du plan osculateur en M à l'hélice conique passe par le point K, et elle fait avec OK un angle égal à $OM'K$, puisqu'elle est perpendiculaire à $M'K$, de sorte qu'elle est tangente au lieu des points K.

NOTE SUR LES RAYONS ET CERCLES DE COURBURE;

D'APRÈS M. SCHELLBACH.

(Journal de M. Crelle, t. XLV, p. 263; 1853.)

Coordonnées rectangulaires.

1. *Lemme.* Soient

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2$$

les coordonnées rectangulaires de trois points donnés dans l'espace; x', y', z' les coordonnées courantes d'un plan passant par ces trois points.

L'équation du plan est

$$(x'-x_1)[\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y] + (y'-y_1)[\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z] + (z'-z_1)[\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x] = 0,$$

ou

$$\Delta x = x_1 - x, \quad \Delta x_1 = x_2 - x_1, \quad \Delta^2 x = \Delta x_1 - \Delta x.$$

De même pour y et z.

2. PROBLÈME. *Mêmes données. Trouver l'équation du cercle passant par les trois points.*

Solution. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre;

ρ le rayon. Posons

$$\xi - x_1 = u, \quad \eta - y_1 = v, \quad \zeta - z_1 = w.$$

On a évidemment les quatre équations

$$(1)\quad \begin{cases} u[\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y] + v[\Delta z\,\Delta_2 x - \Delta x\,\Delta^2 z] \\ + w[\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x] = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad (u + \Delta x)^2 + (v + \Delta y)^2 + (w + \Delta z)^2 = \rho^2,$$

$$(3)\quad u^2 + v^2 + w^2 = \rho^2,$$

$$(4)\quad (u - \Delta x_1)^2 + (v - \Delta y_1)^2 + (w - \Delta z_1)^2 = \rho^2.$$

Désignons par Δs la distance du premier point au second, par Δs_1 la distance du second au troisième, et supposons les deux distances égales, de sorte que le triangle est isocèle; on a donc

$$(5)\quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2 + (\Delta z_1)^2 = (\Delta s)^2 = (\Delta s_1)^2,$$

or

$$(\Delta x_1)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta x_1 - \Delta x)(\Delta x_1 + \Delta x) = \Delta^2 x(2\Delta x + \Delta^2 x).$$

De même pour y, etc.; donc

$$(6)\quad 2[\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z] + (\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 = 0.$$

Retranchant successivement l'équation (3) de l'équation (2) et de l'équation (4), on obtiendra

$$(7)\quad 2(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z) + (\Delta s)^2 = 0,$$

$$(8)\quad 2(u\,\Delta x_1 + v\,\Delta y_1 + w\,\Delta z_1) - (\Delta s_1)^2 = 0;$$

d'où

$$(9)\quad u\,\Delta^2 x + v\,\Delta^2 y + w\,\Delta^2 z = (\Delta s)^2.$$

On satisfait à l'équation (1) en posant

$$u = \lambda\,\Delta^2 x, \quad v = \lambda\,\Delta^2 y, \quad w = \lambda\,\Delta^2 z,$$

où λ est indéterminé.

Substituant ces valeurs dans l'équation (9) et dans l'é-

quation (3), on a

$$(10) \qquad \lambda[(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2] = [\Delta s]^2,$$

$$(11) \qquad \lambda^2[(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2] = \rho^2,$$

et de là

$$\lambda = \frac{\rho^2}{(\Delta s)^2},$$

et de là enfin

$$\xi - x_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 x}{(\Delta s)^2}, \quad \eta - y_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 y}{(\Delta s)^2}, \quad \zeta - z_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 z}{(\Delta s)^2},$$

$$\rho = \pm \frac{(\Delta s)^2}{\sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2}},$$

équations aux *différences* de même forme que celles qu'on obtient pour les *différentielles* relatives au cercle osculateur, et l'équation (1) pour un triangle quelconque est semblable à celle du plan osculateur et peut servir à l'établir.

Coordonnées polaires.

3. Soient A et A′ deux points consécutifs d'une courbe plane, OA, OA′ deux rayons vecteurs, OX l'axe polaire, MA, MA′ les deux rayons de courbure consécutifs, OB la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la tangente en A, OB_1 la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en B_1; faisons

$$AO = r, \quad A'O = r + dr, \quad OB = p, \quad OB_1 = p + dp,$$

$$AA' = ds; \quad \text{angle OA, OX} = \varphi; \quad \text{angle OA', OX} = \varphi + d\varphi;$$

$$\text{angle AB, OK} = \omega; \quad \text{angle A'B}_1\text{, OX} = \omega + d\omega;$$

donc

$$\text{angle AMA'} = d\omega; \quad AB = \tau;$$

on a

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\tau}, \quad \rho = \frac{ds}{d\omega} = \frac{rdr}{\tau d\omega} = \frac{rdr}{dp},$$

$$\text{aire du triangle OAA'} = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} pds, \quad p = \frac{r^2 d\varphi}{ds};$$

d'où

(1) $$\rho = \frac{rdr}{d.\frac{r^2 d\varphi}{ds}}.$$

4. *Exemple.* $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; équation de la lemniscate,

$$rr' = -a^2 \sin 2\varphi,$$

$$a^4 = r^2(r^2 + r'^2) = r^2 s'^2, \quad s' = \frac{a^2}{r};$$

dérivées prises par rapport à φ,

$$\rho = \frac{rdr}{d.\frac{r^2}{s'}} = \frac{a^2}{3r}.$$

5. Posons $\frac{1}{r} = u$; alors

$$s'^2 = r^2 + r'^2 = \frac{u^2 + u'^2}{u^4},$$

$$\frac{d.\frac{r^2}{s'}}{d\varphi} = \frac{d.(u^2 + u'^2)^{-\frac{1}{2}}}{d\varphi} = -\frac{u'(u + u'')}{(u^2 + u'^2)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

(2) $$\rho = \frac{u^2 s'^3}{u + u''}.$$

THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES;

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

1er THÉORÈME. *Toute fonction homogène à deux indéterminées x, y, et d'un degré impair $m = 2n + 1$,*

$$a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots$$
$$+ m a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m,$$

peut être réduite à la forme canonique

$$p_0(x+a_0 y)^m + p_1(x+\alpha_1 y)^m + \ldots + p_n(x+\alpha_n y)^m,$$

par la solution d'une équation du degré $n+1$.

(Sylvester.)

Démonstration. Ce théorème, que son illustre auteur a tiré de la théorie des *adjoints* et des *hyperdéterminants*, et que M. Faà de Bruno n'a démontré récemment dans le Journal de M. Liouville qu'au moyen d'une analyse assez longue et compliquée, peut être établi très-simplement, ainsi qu'il suit.

En identifiant les deux expressions précédentes, on trouve

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} p_0+p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n=a_0,\\ p_0\alpha_0+p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_{n-1}\alpha_{n-1}+p_n\alpha_n=a_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_0\alpha_0^{2n}+p_1\alpha_1^{2n}+p_2\alpha_2^{2n}+\ldots+p_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n}+p_n\alpha_n^{2n}=a_{2n},\\ p_0\alpha_0^{2n+1}+p_1\alpha_1^{2n+1}+p_2\alpha_2^{2n+1}+\ldots+p_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n+1}+p_n\alpha_n^{2n+1}=a_{2n+1}, \end{array}\right.$$

$2n+2$ équations pour autant d'inconnues p_i et α_i. Éliminons d'abord p_0 : faisant, en général,

$$q_i=p_i(\alpha_0-\alpha_i),$$

on obtient ces $2n+1$ équations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}+q_n=a_0\alpha_0-a_1,\\ q_1\alpha_1+q_2\alpha_2+\ldots+q_{n-1}\alpha_{n-1}+q_n\alpha_n=a_1\alpha_0-a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q_1\alpha_1^{2n-1}+q_2\alpha_2^{2n-1}+\ldots+q_{n-1}\alpha_{2-1}^{2n-1}+q_n\alpha_n^{2n-1}=a_{2n-1}\alpha_0-a_{2n},\\ q_1\alpha_1^{2n}+q_2\alpha_2^{2n}+\ldots+q_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n}+q_n\alpha_n^{2n}=a_{2n}\alpha_0-a_{2n+1}. \end{array}\right.$$

Prenons maintenant $n+1$ facteurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$; on pourra supposer qu'ils vérifient les n équations sui-

vantes, qui déterminent les rapports de l'un d'eux à tous les autres :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_1^2 + \ldots + A_n\alpha_1^n = 0, \\ A_0 + A_1\alpha_2 + A_2\alpha_2^2 + \ldots + A_n\alpha_2^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0 + A_1\alpha_n + A_2\alpha_n^2 + \ldots + A_n\alpha_n^n = 0. \end{array}\right.$$

Multiplions par ces facteurs respectivement : 1° les premières $n+1$ équations du système (2); 2° les $n+1$ équations du même système qui suivent la première; 3° les $n+1$ équations qui suivent la deuxième, etc., et enfin les dernières $n+1$ équations : ajoutant les produits fournis par chaque groupe de $n+1$ équations, et ayant égard aux relations (3), nous trouverons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} A_0(a_0\alpha_0 - a_1) + A_1(a_1\alpha_0 - a_2) + \ldots + A_n(a_n\alpha_0 - a_{n+1}) = 0, \\ A_0(a_1\alpha_0 - a_2) + A_1(a_2\alpha_0 - a_3) + \ldots + A_n(a_{n+1}\alpha_0 - a_{n+2}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0(a_n\alpha_0 - a_{n+1}) + A_1(a_{n+1}\alpha_0 - a_{n+2}) + \ldots + A_n(a_{2n}\alpha_0 - a_{2n+1}) = 0, \end{array}\right.$$

autres $n+1$ équations entre lesquelles on déterminera les rapports des quantités $A_0, A_1, \ldots, A_n$, et il restera une équation en α_0 exprimant que le déterminant des équations (4) est nul. Ainsi α_0 sera une racine de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le déterminant des quantités

$$\left|\begin{array}{lll} a_0 x - a_1, & a_1 x - a_2, \ldots, & a_{n+1} x - a_{n+2}, \\ a_1 x - a_2, & a_2 x - a_3, \ldots, & a_n x - a_{n+1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x - a_{n+1}, & a_{n+1} x - a_{n+2}, \ldots, & a_{2n} x - a_{2n+1} \end{array}\right|$$

et qui sera évidemment du degré $n+1$. On dira la même chose de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, de manière que cette équation aura pour racines les $n+1$ inconnues α_i, et, après l'a-

voir résolue, on déterminera les $n+1$ inconnues p_i au moyen de $n+1$ équations linéaires prises dans le système (1).

2e Théorème. *Soit*

$$F_1=0, \quad F_2=0, \ldots, \quad F_n=0,$$

un système de n *équations homogènes littérales entre les* n *inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_n$; F_1 *est du degré* p_1, F_2 *du degré* $p_2, \ldots$, F_n *du degré* p_n. *Soit* $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n = P$. *En éliminant les inconnues, on parvient à une équation homogène entre les coefficients. Les coefficients de* F_1 *montent dans chaque terme au degré* $\frac{P}{p_1}$, *les coefficients de* F_2 *au degré* $\frac{P}{p^2}$, *etc.; conséquemment, le degré de l'équation est*

$$P\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right).$$

(Cayley.)

Je prends cet énoncé dans les *Nouvelles Annales*, tome VIII, page 115 : la démonstration qu'on a donnée au même endroit n'est pas exacte, car on y suppose qu'une fonction entière homogène entre n indéterminées x_1, $x_2, \ldots, x_n$ peut toujours être décomposée en facteurs de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, ce qui n'est pas vrai lorsque $n > 2$. Je crois que la suivante est complétement rigoureuse et assez simple (*).

Soit posé

$$\frac{x_1}{x_n}=y_1, \quad \frac{x_2}{x_n}=y_2, \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n}=y_{n-1}.$$

Si l'on substitue dans les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les va-

(*) Il y a dans le même article des *Nouvelles Annales*, que nous avons rappelé, quelques autres inexactitudes. Il est facile de les rectifier.

leurs de x_1, x_2,..., x_{n-1}, et qu'on fasse disparaître les dénominateurs, on trouvera n autres fonctions entières φ_1, φ_2,..., φ_n respectivement des mêmes degrés entre les inconnues y_1, y_2,..., y_{n-1}. On aura donc, entre ces inconnues, les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_{n-1} = 0, \quad \varphi_n = 0,$$

et les $n-1$ premières équations étant résolues, fourniront $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ systèmes de valeurs des inconnues y_1, y_2,..., y_{n-1}. Substituant successivement ces systèmes de valeurs dans la dernière fonction φ_n, et multipliant tous les résultats entre eux, on formera un produit que nous désignerons par $\Pi\varphi_n$, et l'équation $\Pi\varphi_n = 0$ sera celle qu'on doit obtenir par l'élimination des inconnues x_1, x_2,..., x_n. Or ce produit $\Pi\varphi_n$ sera une fonction entière et symétrique des systèmes des racines y_1, y_2,..., y_{n-1}, et, par suite, il pourra s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients des équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_{n-1} = 0$$

(*voyez* Serret, *Algèbre supérieure,* 8e leçon, pages 86 à 96), c'est-à-dire des coefficients des fonctions F_1, F_2,..., F_{n-1}; d'un autre côté, $\Pi\varphi_n$ est un produit de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, ou $\frac{P}{p_n}$ facteurs, et, dans chacun de ces facteurs, les coefficients de la fonction φ_n ou F_n entrent au premier degré; d'où il suit que les coefficients de F_n monteront au degré $\frac{P}{p_n}$ dans le même produit. On peut donc conclure que, dans l'équation *résultante*, les coefficients de F_n montent au degré $\frac{P}{p_n}$. Par un raisonnement semblable, on prouvera que les coefficients de F_{n-1} y montent au degré $\frac{P}{p_{n-1}}$, et ainsi des autres.

THÉORÈMES SUR LES SURFACES COURBES (*);

PAR M. A. HAILLECOURT,
Professeur au lycée de Nîmes.

M. J. Binet, cité par M. Leroy (*Analyse appliquée*, 2e édit., n° 231), emploie, pour la démonstration de deux propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde, une méthode qui paraît n'avoir pas été assez remarquée. Je vais l'appliquer à plusieurs théorèmes, et, en particulier, à celui de M. Steiner (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 407).

J'invoquerai constamment deux principes évidents pour quiconque aura suivi attentivement l'article de M. Leroy indiqué plus haut, et la démonstration ordinaire des formules d'Euler pour la transformation des coordonnées.

Premier principe.

Si un théorème vrai pour trois axes rectangulaires OA, OB, OC coupant une surface subsiste encore quand on y remplace deux axes OA, OB par d'autres axes aussi rectangulaires compris dans le même plan perpendiculaire sur OC; alors ce théorème est vrai pour trois axes rectangulaires quelconques.

Deuxième principe.

Si un théorème vrai pour trois diamètres conjugués d'une surface du second ordre subsiste quand on y remplace deux axes OA, OB par deux autres axes OA_1, OB_1 aussi conjugués et situés dans le même plan conjugué au troisième OC; alors ce théorème est vrai pour trois diamètres conjugués quelconques.

CONSÉQUENCES DU PREMIER PRINCIPE.

1. THÉORÈME DE M. STEINER. *Trois cordes rectangulaires d'une surface du second ordre tournant autour*

(*) Voir *Nouvelles Annales*, tome I, page 497.

d'un point O *et la coupant en six points* A, A', B, B', C, C', *on a*

$$\left(\frac{AA'}{OA \cdot OA'}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{OB \cdot OB'}\right)^2 + \left(\frac{CC'}{OC \cdot OC'}\right)^2 = \text{const.}$$

Démonstration. Le plan AOB pris pour plan des X, Y, tandis qu'on prend OC pour axe des Z, coupe la surface suivant une conique E.

Dans ce plan, menons deux nouveaux axes orthogonaux OX_1, OY_1; nous aurons (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 408)

$$\left(\frac{A_1 A'_1}{OA_1 \times OA'_1}\right)^2 + \left(\frac{B_1 B'_1}{OB_1 \times OB'_1}\right)^2 = \left(\frac{AA'}{OA \cdot OA'}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{OB \cdot OB'}\right)^2.$$

Ajoutant aux deux membres $\left(\frac{CC'}{OC \cdot OC'}\right)^2$, il vient

$$\left(\frac{A_1 A'_1}{OA_1 \cdot OA'_1}\right)^2 + \left(\frac{B_1 B'_1}{OB_1 \cdot OB'_1}\right)^2 + \left(\frac{CC'}{OC \cdot OC'}\right)^2$$
$$= \left(\frac{AA'}{OA \cdot OA'}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{OB \cdot OB'}\right)^2 + \left(\frac{CC'}{OC \cdot OC'}\right)^2.$$

Comme on peut de nouveau faire tourner la corde CC' et une des deux nouvelles cordes $A_1 A'_1$, par exemple, autour de $B_1 B'_1$, sans altérer la valeur de la fonction, on voit qu'elle est constante. C. Q. F. D.

Scolie. La méthode étant maintenant expliquée, nous pourrons dorénavant être plus concis. Remarquons avec soin que *les questions de géométrie à trois dimensions se ramènent à des questions de géométrie plane.*

2. *Lemme.* Soit

$$0 = 1 + (Ax + By) + (Cx^2 + Dxy + Fy)\ldots$$

l'équation d'une courbe d'ordre m rapportée à des axes rectangulaires. Passant aux coordonnées polaires

$$0 = 1 + (A\cos\varphi + B\sin\varphi)\rho$$
$$+ (C\cos^2\varphi + D\sin\varphi\cos\varphi + E\sin^2\varphi)\rho^2\ldots;$$

si, pour avoir deux sécantes orthogonales OV, OV_1, nous donnons à φ deux valeurs différant de $\frac{\pi}{2}$, et que nous désignions par ρ et ρ_1 une quelconque des racines de l'équation dans le premier et dans le second cas, nous aurons, d'après des principes connus,

$$-\sum\frac{1}{\rho} = A\cos\varphi + B\sin\varphi, \quad -\sum\frac{1}{\rho_1} = -A\sin\varphi + B\cos\varphi;$$

d'où

$$(1) \qquad \left(\sum\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\sum\frac{1}{\rho_1}\right)^2 = A^2 + B^2 = \text{const.};$$

de même, comme

$$\sum\frac{1}{\rho'\rho''} = C\cos^2\varphi + D\sin\varphi\cos\varphi + E\sin^2\varphi,$$

$$(2) \qquad \sum\frac{1}{\rho'\rho''} + \sum\frac{1}{\rho'_1\rho''_1} = C + E = \text{const.},$$

en combinant (1) et (2),

$$(3) \qquad \sum\frac{1}{\rho^2} + \sum\frac{1}{\rho_1^2} = A^2 + B^2 - 2(C+E) = \text{const.}$$

Notre principe nous permet de conclure des courbes aux surfaces; mais auparavant remarquons que ρ_0 étant la distance au point O du centre des moyennes harmoniques des m points où OV perce la surface, nous avons

$$\frac{m}{\rho_0} = \sum\frac{1}{\rho}.$$

Cela étant :

Trois axes rectangulaires tournant autour d'un point fixe O *et coupant une surface d'ordre m chacun en m points,*

1er THÉORÈME. *La somme des carrés inverses des* $3m$ *segments comptés à partir de* O *est constante.*

2ᵉ Théorème. *La somme des* $\frac{3m(m-1)}{1.2}$ *produits deux à deux des segments compris sur les mêmes axes, est constante.*

3ᵉ Théorème. *Si, sur chacun des axes, on prend par rapport à O le centre des moyennes harmoniques des points où cet axe perce la surface, la somme des carrés des inverses des rayons vecteurs de ces trois centres est constante.*

Corollaire. Le plan qui passe par ces trois centres roule sur une sphère décrite de O comme centre (*voir* 4).

3. *Lemme.* La somme des carrés inverses de deux diamètres rectangulaires d'une ellipse est constante; donc :

Théorème. *La somme des carrés inverses de trois diamètres rectangulaires d'un ellipsoïde est constante.*

(Pour les hyperboloïdes, on prend négativement les carrés des diamètres imaginaires.)

4. *Lemme.* L'enveloppe d'une corde AB vue sous un angle droit, du centre d'une ellipse, est une circonférence concentrique.

Soient trois diamètres rectangulaires OC, OB, OA d'un ellipsoïde; prenons la projection commune H de C et O sur AB. H est à une distance constante de O. La projection de O sur le plan CAB est la hauteur du triangle COH. Comme ce triangle est constant, la perpendiculaire OP abaissée sur CH est aussi constante; donc :

Théorème. *Le plan qui passe par les extrémités de trois diamètres rectangulaires d'un ellipsoïde roule sur une sphère.* (Chasles, *Correspondance polytechnique*, tome III, pages 302 et suivantes.)

Remarque I. Le troisième théorème (II) prouve que les trois centres des moyennes harmoniques situés sur les trois axes sont sur un ellipsoïde. C'est ainsi que se démontre le principe, objet du corollaire.

Remarque III. Notre lemme pour l'hyperbole suppose les deux diamètres OA, OB réels. Par suite, pour les hyperboloïdes, le dernier théorème n'est pas vrai sans restriction.

5. *Lemme.* OA, OB étant à angle droit (mêmes données), menons les tangentes AT, BT. Dans la section AOB, le point T décrit une ellipse E concentrique.

Par AT et BT menons deux plans parallèles à OD (diamètre conjugué à la section AOB) (*) et prenons le pied S de leur intersection TS sur le plan P tangent en C. S décrit évidemment une ellipse E′ ayant son centre sur OD et qui appartient au lieu du point de concours de trois plans tangents menés par les extrémités de trois diamètres rectangulaires.

Ce lieu est donc composé d'une infinité de sections elliptiques.

Théorème. *Le lieu du sommet d'un angle trièdre dont les faces sont tangentes à un ellipsoïde aux extrémités de trois diamètres rectangulaires est un ellipsoïde concentrique.* (Chasles, *Correspondance polytechnique.*)

6. Le théorème de Monge démontré par Poisson (*Correspondance polytechnique,* tome I, pages 30, 240), sur le lieu du sommet d'un angle trièdre trirectangle circonscrit à l'ellipsoïde, paraît échapper à cette méthode. On y arrive pourtant de la manière la plus heureuse ainsi qu'il suit :

Rappelons que : 1° le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une conique à centre est un cercle concentrique; 2° un plan tangent à une surface du second ordre, mobile parallèlement à une droite, enveloppe un cylin-

---

(*) On sait que le plan tangent en un point K est parallèle à tout diamètre conjugué du diamètre OK.

dre du second ordre qu'on peut par conséquent prendre pour surface directrice, et dont l'axe passe par le centre de la surface donnée.

Cela posé, soient T un point du lieu ; a, b, c les points de contact des trois faces de l'angle trièdre ; α, β, ω les projections sur le plan BTA de a, b et de O, centre commun de la surface et de la courbe de contact du cylindre circonscrit perpendiculaire au plan BTA.

La base de ce cylindre est une conique ayant ω pour centre, et tangente aux droites TA, TB en α, β.

Faisons mouvoir l'angle trièdre de sorte que la face AB glisse dans son propre plan. Le point T décrit une circonférence de centre ω, et qui appartient au lieu demandé. Ce lieu a donc une infinité de sections circulaires. O se projette sur leurs centres. Donc :

Théorème. *Le lieu du sommet d'un angle trirectangle circonscrit à une surface courbe à centre du second ordre est une sphère concentrique.* C. Q. F. D.

Conséquences du deuxième principe.

7. *Lemme.* Dans l'ellipse, la somme des carrés des projections sur une droite quelconque de deux diamètres conjugués est constante.

Soit OAB une section d'ellipsoïde faite par un plan passant par le centre ; A, B étant deux points conjugués, projetons-les en α, β sur un diamètre fixe KK′, et en a, b sur la droite H′H, projection de K′K sur le plan OAB.

Nous avons

$$\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 = \text{const.},$$
$$\alpha a^2 + \beta b^2 = \text{const.};$$

car

$$\alpha a^2 + \beta b^2 = \tan^2\omega\,(\mathrm{O}a^2 + \mathrm{O}b^2),$$

et on sait que ω est l'angle que forment les diamè-

tres KK′, HH′,

$$Oa^2 + Ob^2 = \text{const.},$$

et aussi

$$A\alpha^2 = Aa^2 + \alpha a^2,$$
$$B\beta^2 = Bb^2 + \beta b^2;$$

donc

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = \text{const.},$$

d'où :

THÉORÈME. *Dans l'ellipsoïde, la somme des carrés des distances de trois points conjugués à un diamètre fixe est constante.*

Nous avons aussi

$$O\alpha^2 + O\beta^2 = \text{const.}$$

THÉORÈME. *La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur un diamètre fixe est constante.* (CHASLES, *loc. cit.*)

On démontrerait les mêmes choses en prenant un plan diamétral au lieu d'un diamètre.

8. Soit OC le diamètre conjugué au plan OAB.

Nous venons de voir que

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = \text{const.},$$

d'où, multipliant par OC^2, désignant par surf (OC, OB) la surface du parallélogramme construit sur OC et OB, il vient, puisque surf (OB, OA) est constante,

$$\text{surf}^2(OA, OB) + \text{surf}^2(OA, OC) + \text{surf}^2(OB, OC) = \text{const.}$$

Mais si l'on construit le parallélipipède circonscrit sur OA, OB, OC, les faces sont respectivement quadruples des parallélogrammes que nous considérons. Donc :

THÉORÈME. *La somme des carrés des faces du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constante.* (CHASLES.)

9. *Lemme.* A et B sont deux points conjugués, AT,

BT leurs tangentes. Sur un diamètre fixe mené dans le plan du parallélogramme AOBT, on a

$$\frac{1}{\overline{OE}^2} + \frac{1}{\overline{OD}^2} = \text{const.};$$

D et E sont les intersections du diamètre et des côtés BT, AT du parallélogramme; par AT, BT, menons les plans parallèles au diamètre conjugué OC et, par suite, tangents à l'ellipsoïde. Si une droite de l'espace projetée en OD est coupée en L_1, D_1 (on projette parallèlement à OC), il est clair que

$$\frac{1}{\overline{OE}_1^2} + \frac{1}{\overline{OD}_1^2} = \text{const}.$$

Théorème. *La somme des carrés des inverses des segments interceptés sur un diamètre fixe par trois plans tangents conjugués est constante.*

10. *Lemme.* Coupons deux diamètres fixes d'un cercle par deux tangentes rectangulaires quelconques. Il est aisé de voir que

$$\frac{1}{\text{OD}.\text{OD}'} + \frac{1}{\text{OE}.\text{OE}'} = \text{const.},$$

D et D′ étant les intersections des deux diamètres OD, OD′ par l'une des tangentes, E et E′ les intersections des mêmes diamètres par la seconde tangente; ou

$$\frac{1}{\text{surf DOD}'} + \frac{1}{\text{surf EOE}'} = \text{const.}$$

La propriété étant projective est vraie pour l'ellipse.

Imaginons dans l'espace deux diamètres au lieu d'un (§ 9); nous aurons :

Théorème. *La somme des inverses des surfaces de trois triangles compris entre deux diamètres fixes de l'ellipsoïde et les traces sur leur plan de trois plans tangents conjugués est constante.* (Chasles, *loc. cit.*)

Remarque générale. Nous ramenons tout à la géométrie plane, parce que de trois diamètres conjugués a, b, c nous n'en considérons que deux, a et b. Si donc dans un théorème, c entre d'une manière implicite, lors même qu'on ne fait varier que a et b, le théorème échappe à la méthode. C'est ce qui aura lieu, par exemple, quand il s'agira des courbures en trois points conjugués ou même simplement des normales.

Ainsi on ne pourra pas démontrer par cette voie ce théorème :

La somme des carrés des normales en trois points conjugués, prolongées jusqu'à un plan diamétral principal, est constante.

COSMOGRAPHIE (fin)

(voir p. 356).

ASTRÉE. 8 décembre 1845. *Hencke* [*Charles-Louis* (*)]. Driessen (Brandebourg).

Neuvième grandeur.

Après la fondation de l'observatoire de Königsberg, lorsque l'astronomie observatrice prit cet élan qu'elle doit presque uniquement à Bessel, les explorations planétaires firent place aux travaux si éminemment méritoires ayant pour but de vérifier et perfectionner toutes les bases fondamentales de la science; même la découverte

(*) Né le 8 avril 1793; gère l'office de la poste aux chevaux à Driessen usqu'au 1er juillet 1837; est mis à la retraite, sur sa demande, avec pension pour deux années de service militaire et vingt-neuf années de service civil. En Allemagne, la poste aux lettres et la poste aux chevaux ne forment qu'une administration.

de plusieurs comètes à courte période n'excita pas des recherches tellement persévérantes, qu'on pût se dispenser de prendre des dispositions spéciales pour ranimer cette branche spéciale. *Les cartes célestes académiques* appartiennent à ces dispositions.

En 1825, Bessel avait terminé ses observations dans les deux zones, 15 degrés nord et 15 degrés sud de l'équateur; elles surpassaient en exactitude et pour le nombre d'étoiles inscrites, l'*Histoire céleste de Lalande*, et avaient, du reste, le même but; savoir : de donner une détermination locale pour un grand nombre d'étoiles faibles en descendant jusqu'à la neuvième et dixième grandeur, de manière à être sûr de pouvoir les retrouver, et par conséquent de procurer une exactitude suffisante aux recherches cométaires. On peut regarder les cartes de Harding comme la représentation graphique de l'*Histoire céleste* : Bessel désirait obtenir le même avantage pour ses propres observations, afin d'avoir une image fidèle de toutes les étoiles jusqu'à une grandeur déterminée, sans qu'il en manquât une seule. A cet effet, il proposa, à l'Académie de Berlin, de partager la zone céleste de — 15 à + 15 degrés de déclinaison en vingt-quatre feuilles (en vingt-quatre heures de 15 degrés); d'insérer dans chaque feuille toutes les étoiles observées dans les Catalogues de Bradley, de Piazzi et dans l'*Histoire céleste*; il désirait, en outre, que toutes les étoiles jusqu'à la dixième grandeur, c'est-à-dire celles qu'on peut voir dans un *chercheur de comètes* ordinaire, fussent dessinées à vue d'œil selon leur degré de clarté. L'Académie agréa la proposition et y ajouta : 1° la condition de la confection d'un Catalogue complet de toutes les étoiles observées; 2° un prix attaché à la construction de chaque feuille; on se mit à l'œuvre. Dès qu'une feuille était terminée, elle était aussitôt gravée. Il y a aujourd'hui

(1847) quinze feuilles terminées, et la seizième est déjà gravée.

En divisant le travail entre plusieurs, on avait pour but d'opérer en même temps la révision de tout le ciel et par là de découvrir, s'il y avait lieu, quelques planètes dans la zone donnée. Ce but ne fut pas atteint. D'abord le travail n'inspirant pas l'intérêt qu'il méritait, il fallut admettre beaucoup d'amateurs, et ensuite le travail marcha lentement, très-lentement, parce que plusieurs y renoncèrent, et que d'autres n'y travaillèrent qu'à de longs intervalles. La plupart des Cartes furent faites à Berlin.

Toutefois ces Cartes ont amené directement la découverte de deux nouvelles planètes.

M. Hencke qui, par amour pour l'astronomie, a quitté son emploi dans l'administration de la poste (*post sekretair*), révisa et dessina, à l'aide d'un *chercheur cométaire* et d'un fort télescope, les parties du ciel contenues dans les cartes académiques publiées. Voici son procédé. Il dessinait les cartes sur une échelle très-amplifiée. Ainsi il traça la Xe Heure de Göbel à une échelle neuf fois plus grande, et d'autres cartes mêmes seize fois plus grandes. Il insérait les étoiles consignées dans la carte et celles qu'il y ajoutait. Ces étoiles ajoutées étaient, en outre, dessinées sur une carte particulière annexée à la grande carte, et marquées avec diverses couleurs, et chacune portant un numéro indiquant le nombre de fois qu'il l'avait observée; quand il la voyait plus de quatre fois dans la même année, il ne mettait rien. Ainsi le nombre 12, qui se présente fréquemment, indique trois années d'observations attentives de l'étoile que ce nombre affecte; et, par là, au moyen de la constellation voisine, on pouvait conclure un déplacement. Il est évident que, par ce moyen, une planète paraissant sur la carte pouvait être reconnue avec certitude. C'est ainsi que Hencke

ayant rencontré dans la soirée du 8 décembre (1845) une étoile étrangère de neuvième grandeur dans la IVe Heure, il la désigna avec une grande assurance comme une planète; car, si c'était seulement une étoile changeante, il en aurait reconnu des traces pendant tant d'années d'observations. Cette planète fut nommée *Astrée*.

NEPTUNE. *Le Verrier*. 1846.—*Galle*. 23 septembre 1846. Berlin.

Huitième grandeur.

En considérant les diverses découvertes précédentes, on voit que l'astronomie pratique, dans ses diverses branches, a fourni tout ce qui était nécessaire pour amener ces découvertes. Les instruments perfectionnés ont donné la première planète par la forme du disque; la perception du mouvement, à l'aide d'une marche méthodique d'observation, a donné la seconde planète. La connaissance spéciale du ciel d'un des plus grands *astrognostes* du siècle a fait découvrir la troisième planète; des travaux exécutés pour étendre cette connaissance à tout le ciel ont donné la sixième planète. Enfin une certaine hypothèse, assez plausible, jointe à une extrême persévérance, a conduit à la cinquième planète; les moyens que la pratique pouvait offrir, quant aux méthodes de découvertes, étaient épuisés. L'alliance de la théorie avec la pratique a enfin conduit à la septième planète.

Depuis la publication, en 1821, des Tables d'Uranus par Bouvard, il était beaucoup question d'une différence entre les données et la théorie, qui ne pouvait s'expliquer par les lois adoptées. Uranus, avant sa découverte comme planète, avait été observé dix-neuf fois comme étoile de sixième grandeur par Flamsteed, Bradley, Lemonnier et Mayer. Depuis la découverte planétaire, on avait une série continue de quarante années d'observations (1781-

1821) ; de sorte que depuis la première observation de Flamsteed jusqu'en 1821, il s'est écoulé cent trente années, ce qui fait environ une révolution et demie d'Uranus. Le problème consistait donc à représenter, non quelques groupes, mais l'ensemble des phénomènes dans les limites des erreurs d'observations possibles. Cela n'avait pas réussi à l'estimable éditeur des Tables. Les observations qui ont précédé la découverte ne pouvaient se concilier avec celles qui les ont suivies, à moins d'admettre des erreurs d'observations complétement invraisemblables. La source d'erreur devait donc être cherchée ailleurs.

La question fut considérée sous divers aspects. On soupçonna chez Bouvard une erreur dans l'application de la théorie. Examen fait, et quoique la théorie laissât à désirer du côté d'une extrême rigueur, le défaut n'était pas assez considérable pour expliquer la *différence* mentionnée. Cette circonstance paraît avoir excité Bessel à proposer cette question à l'Académie de Berlin, s'il n'existait pas dans les attractions planétaires quelque chose d'analogue aux *affinités électives* en chimie, et, par là, on pourrait expliquer cette *différence* et encore une autre; savoir, la masse différente qu'on obtient pour Jupiter en considérant successivement son action sur Saturne et sur les petites planètes. Les explications ne se sont pas confirmées. Les perturbations de Vesta ont montré qu'une telle *affinité élective* n'existe pas entre le Soleil, Jupiter et Vesta, etc., et comme les perturbations qu'exerce Jupiter sur la comète de *Pons* (*), sur Vesta, Junon, Pallas, Cérès, donnent pour Jupiter la même masse que les perturbations exercées par Jupiter sur ses satellites; on peut en

(*) C'est ainsi que, par modestie, M. Encke désigne la comète d'Encke que Pons a observée le premier, mais dont Encke a calculé la courte période.

conclure que la masse différente qu'on obtient en considérant les perturbations de Saturne par Jupiter doit tenir à des termes négligés dans la série des perturbations, et non à une prétendue affinité élective. Il ne restait donc, pour expliquer l'anomalie, qu'à adopter une nouvelle force perturbatrice, une nouvelle planète perturbatrice; idée qui avait été mise en avant par Bouvard (*), Hansen, Bessel, Airy et d'autres, mais sans devenir l'objet d'une recherche spéciale. Même une question proposée à cet effet par l'Académie de Göttingue resta sans réponse.

La question n'a pas été attaquée sérieusement; on peut indiquer plusieurs motifs :

1°. Les masses de Jupiter et de Saturne, les plus influentes sur Uranus, ne sont connues d'une manière satisfaisante que depuis peu d'années.

2°. La petitesse de cette double influence, qui ne s'élève qu'à $\frac{5}{60}$ de degré par siècle; de sorte qu'on croyait devoir recourir à une voie indirecte pour connaître l'influence principale. En effet, en 1838, M. Airy a montré, d'après les observations de 1833 à 1836, que la distance d'Uranus au Soleil, donnée par les Tables pour cette année (1838), était trop petite; ce qui indiquait au moins un changement à faire dans la forme de l'orbite.

3°. La complication du problème, et c'est là le motif principal, car il s'agit de trouver, non-seulement les éléments de la planète perturbatrice, mais même les vrais éléments d'Uranus. Le nombre des inconnues croît d'autant

(*) Le général d'artillerie Le Noury, amateur d'astronomie, mort en 1839, était lié avec Bouvard. A la suite d'un dîner où je me suis trouvé avec ce général, Bouvard expliqua ses idées sur la planète perturbatrice, et croyait qu'on pourrait la découvrir par *observation*. Il exprima, à cette occasion, son opinion sur l'état de l'astronomie pratique en France. Peu flatteuse, il la croyait en décadence. Cela vient peut-être de ce que la vieillesse met volontiers devant nos yeux un prisme morose. Il y a de cela une douzaine d'années.

plus qu'on ne peut plus considérer les différences entre la théorie et l'observation, uniquement comme l'effet de la planète inconnue, mais qu'il faut aussi avoir égard aux altérations que subissent par là les éléments admis pour Uranus. Le nombre des inconnues s'élève généralement à treize, savoir les six éléments de chacune des deux planètes et la masse de la planète cherchée. En faisant coïncider le plan de l'orbite inconnue avec le plan de l'écliptique, il reste encore neuf inconnues.

On ne connaît que les *formes* des termes de la série perturbatrice, termes très-compliqués, et dans lesquels il faut insérer de tels nombres pour les éléments, qu'ils fassent disparaître les *différences* entre la théorie et l'observation; ce qui exige un talent spécial, un grand tact *numérique*, puisqu'une solution rigoureuse est impossible.

C'est cette recherche que M. Le Verrier a exécutée d'une manière exemplaire à Paris; il a publié ses recherches successivement dans les *Comptes rendus* du 10 novembre 1845, 1er juin et 31 août 1846. Mais on trouve une revue complète de tout ce travail dans les *Recherches sur les mouvements de la planète* Herschel; par M. U.-J. Le Verrier. Paris, 1846 (*).

On y voit la marche aussi conséquente que sûre suivie par M. Le Verrier, et qui explique entièrement comment il avait peu à craindre, pour ses publications, que le succès ne couronnât pas ses efforts.

Voici, en peu de mots, la marche. D'abord, M. Le Verrier développe les perturbations que les nouvelles masses de Jupiter et Saturne exercent sur Uranus, et

(*) Cet admirable travail, si honorable pour M. Le Verrier et pour la France, est inséré dans la *Connaissance des Temps,* 1849. Tout y porte l'empreinte d'une éminente faculté calculatrice, appliquée à un problème sublime, éternelle gloire de Newton et de Laplace.

d'une manière plus complète; et par là, faisant d'ailleurs disparaître les fautes typographiques et de calcul, il améliore les Tables de Bouvard. Ensuite, conservant les éléments de Bouvard, il calcule le lieu pour les anciennes et nouvelles observations. Il établit les équations de condition qui indiquent pour chaque lieu l'influence qu'aurait un changement dans les quatre éléments d'Uranus, l'époque, le mouvement moyen, l'excentricité et le périhélie; il peut faire abstraction de la latitude, et conséquemment aussi des nœuds et de l'inclinaison. Il examine après, si en adoptant des erreurs d'observations vraisemblables et par de simples changements dans les éléments d'Uranus, on ne pouvait parvenir à concilier la théorie et l'observation. Dans l'impossibilité de parvenir à ce résultat, il établit les équations de perturbation pour une planète inconnue, et dont la distance au Soleil soit le *double* de la distance d'Uranus au Soleil. Il obtient ainsi huit inconnues, savoir les quatre corrections des éléments d'Uranus, les trois éléments et la masse de la planète inconnue. Par l'élimination des quatre éléments d'Uranus, il donne aux trois éléments de la planète inconnue, excentricité, périhélie et masse, la forme d'une fonction de l'époque de cette même planète. Il trouve qu'on n'obtient une valeur *positive* pour la masse qu'en adoptant pour l'époque un arc renfermé entre deux limites déterminées, et débarrassant les anciennes observations de Flamsteed d'erreurs probables, l'époque cherchée est ramenée à être comprise entre 243 et 250 degrés pour le 1er janvier 1800; limites qui suffisent pour faire disparaître sensiblement les *différences* entre la théorie et l'observation dans les quatre-vingts dernières années d'observations, et dans des essais numériques sur les autres éléments, on trouve toujours, pour la planète cherchée, une masse plus grande que celle d'Uranus.

Dans une seconde amélioration de ces résultats, M. Le Verrier calcule les perturbations pour des valeurs différentes du demi-grand axe et de l'époque, et parvient ainsi à des éléments de la nouvelle planète, différant peu des précédents, et qui donnent un accord parfait entre la théorie et l'observation dans les anciennes et les nouvelles observations.

M. Galle, en comparant le ciel avec la carte céleste académique du Dr Bremiker, découvrit, le 23 septembre 1846, la planète Neptune, de huitième grandeur, à environ 50′ du lieu calculé. Ce brillant résultat peut être considéré comme un véritable trophée pour M. Le Verrier, à cause de la grandeur du but, du choix exquis d'une méthode modèle et de l'heureux emploi des données.

M. Airy a fait connaître, dans une Notice, qu'un Anglais nommé Adams, ayant fait des calculs analogues à ceux de M. Le Verrier, est parvenu au même résultat, et que M. Challis, à l'observatoire de Cambridge, avait découvert la planète d'après ces calculs. Cette Notice n'ôte rien au mérite de la découverte de M. Le Verrier, dont le travail a été publié avant la découverte de la planète. Le mérite de M. Galle n'en est pas non plus diminué; il a employé tous les moyens disponibles pour découvrir la planète. Mais il y a là un témoignage favorable à l'état actuel de la science; les progrès sont amenés par plusieurs hommes distingués et n'étant pas confinés dans la personnalité individuelle, sont la conséquence de la marche que suivent les travailleurs en général.

« Je crois devoir m'exprimer ainsi, parce que, selon » ma manière de voir, ce serait un dommage extrême si » cette découverte provenant d'un si bel accord entre la » théorie et l'observation, tendait à affaiblir ce lien. La » science *empirique*, l'observation, sera toujours la base

» fondamentale de l'astronomie. Jusqu'ici, l'observation
» seule, sans le secours de la théorie, du moins sans le
» secours direct de la théorie, a fait connaître tous les
» phénomènes ; la théorie est venue ensuite les expliquer,
» les réunir et montrer les points sur lesquels il fallait
» dorénavant diriger l'attention. Sans les *data* de l'ob-
» servation, la théorie ne peut rien déduire, et si elle est
» parvenue à découvrir un nouveau corps céleste, ce
» n'est que grâce à cent cinquante années d'observations,
» et ce résultat brillant indique même la nécessité de
» réunir les deux. D'ailleurs, pour une seule planète que
» l'on doit à la théorie seule, on en a six qui appartien-
» nent à l'observation (*), et ce sera toujours sur cette
» voie qu'on fera les plus nombreuses découvertes. Car il
» s'écoulera bien des années, on peut dire bien des siè-
» cles, avant qu'on puisse espérer de faire une sem-
» blable découverte, du moins pour des planètes plus
» éloignées que Neptune. Soixante années d'observations
» depuis la découverte d'Uranus ont pu faire découvrir
» une anomalie, et donner lieu à des recherches qui
» n'auraient pas abouti si l'on n'avait eu des observa-
» tions remontant à quatre-vingt-dix années avant la
» découverte. Pour réunir les *data,* il fallait presque
» une double révolution d'Uranus. On ne peut espérer de
» trouver des observations sur Neptune comme étoile
» que dans l'*Histoire céleste* ou chez Bradley, car
» Flamsteed s'est rarement occupé d'étoiles de huitième
» grandeur. A cela, il faut ajouter que les perturbations
» que peut subir Neptune d'une planète plus éloignée
» sont probablement plus faibles que les perturbations
» d'Uranus par Neptune, et il faudra au moins une

(*) Depuis que ceci est écrit (1845), l'observation a fait découvrir vingt et une autres planètes.

» dizaine d'années pour connaître les éléments de Nep-
» tune avec assez d'exactitude pour profiter de journaux
» d'observations anciennes. Ainsi l'agrandissement de
» notre système solaire, par la même voie, est placé dans
» un avenir très-éloigné. »

Observation du rédacteur. Le trismégiste Herschel doit son immortalité uniquement à l'*observation,* et nullement aux formules de la haute théorie, et toutefois il n'a jamais dénigré, décrié cette haute théorie, il n'a jamais cherché à en entraver l'enseignement.

Il est à regretter qu'un célèbre calculateur en astronomie, qui n'a jamais fait d'observations et qui doit uniquement, aux formules de la *Mécanique céleste,* sa grande réputation; il est à regretter, dis-je, que cet habile investigateur, que cet ingénieux et heureux coordonnateur de données numériques, ait tenu envers la théorie une conduite opposée à celle de l'illustre Hanovrien, aussi admirable de génie que respectable de caractère.

ANECDOTES SCIENTIFIQUES INÉDITES.

Un jeune professeur de province, versé déjà dans la science du géomètre, mais peu versé dans celle du monde, se plaint d'avoir écrit à un académicien, sur un sujet scientifique, sans qu'on ait daigné lui répondre. Pour le consoler, je lui dis qu'en effet toute lettre honnêtement écrite sur un sujet honnête, et particulièrement de science, mérite réponse. Voltaire correspondait avec des jardiniers. Ainsi l'exigent les convenances; mais le Talmud dit que ceux qui sont *chargés* du fardeau des sciences sont *déchargés* du fardeau des convenances. Peu d'académiciens,

à ce que je crois, lisent le Talmud; mais beaucoup en pratiquent la maxime, comme feu M. Jourdain parlait prose sans s'en douter. Tout ceci m'a rappelé une anecdote qui m'a été racontée par Mathias Metternich (*), mon collègue à l'ancien lycée de Mayence. Né dans le pays, il en connaissait bien les traditions.

Dans la seconde moitié du XVII[e] siècle, un maître d'école rurale dans les environs de Mayence rencontre quelques difficultés dans l'arithmétique qu'il enseignait aux enfants du village. Il en écrit à un homme considérable attaché à l'électeur de Mayence, et qui avait la réputation d'être très-versé dans les sciences de calcul. A quelques semaines de là, l'homme considérable s'excuse auprès du maître d'école, sur ses nombreuses occupations de n'avoir pas répondu plus tôt, et entre ensuite dans tous les détails nécessaires pour faire disparaître les difficultés arithmétiques.

Cet homme considérable se nommait Godefroy-Guillaume Leibnitz. Il était en relation épistolaire avec les personnes les plus éminentes de l'époque; il publiait des travaux sur presque toutes les branches des connaissances humaines; il remplissait des fonctions diplomatiques; il voyageait souvent; et toutefois il trouve encore le temps et ne croit pas au-dessous de sa dignité de répondre à un maître d'école. Nos académiciens sont-ils plus occupés, plus élevés en dignité que Leibnitz? On le dirait.

Voici une autre anecdote publiée par quelques journaux allemands, mais inconnue en France :

Leibnitz étant attaché à l'électeur de Hanovre, fréquentait la maison du banquier israélite du prince. Un jour,

---

(*) Auteur d'une Géométrie et de trois Dissertations *sur la théorie des parallèles, sur le calcul de* π et un Mémoire *de Frictione* couronné par l'Académie de Göttingue. Il a aussi traduit en allemand l'*Algèbre* de Lacroix. Mort vers 1816.

ce banquier lui propose de donner des leçons de mathématiques à un de ses commis qui montrait une grande aptitude pour le calcul. Leibnitz accepte la proposition, mais exige une rémunération exagérée. Le banquier y consent. Alors, Leibnitz lui dit, en souriant, qu'il a voulu savoir quel prix un banquier mettait à l'enseignement des sciences; qu'il se chargeait de soigner l'instruction mathématique du commis, s'il lui trouvait des dispositions, mais à condition qu'il ne sera jamais question d'une rétribution quelconque. Leibnitz prit le commis en telle affection, qu'il le fit loger avec lui, et lui donna pour condisciple un comte hongrois; il leur enseigna à tous deux les mathématiques et sa philosophie. L'Israélite, nommé Raphaël Levy, ne s'appliqua qu'aux mathématiques. Toutefois, il n'a publié qu'une Arithmétique commerciale (*). Le comte s'attacha particulièrement à la métaphysique, et il est mort fou.

Lorsque la ville de Leipzig célébra, en 1845, l'anniversaire séculaire de la naissance de Leibnitz, on chercha un portrait de l'illustre philosophe pour en faire le buste. On ne trouva qu'un seul portrait, dans la famille du commis existant encore dans cette ville, et dont Leibnitz avait gratifié son élève (**).

(*) Kästner, dans son *Histoire des Mathématiques,* tome II, page 706, cite avec éloge cet ouvrage : *Raphael Lévy rechnungs methode, heransgegeben von Meyer Aaron;* Hanovre, 1783 (Méthode de calcul de R. Levy, éditée par Aaron Meyer). On y trouve un procédé ingénieux pour la règle de trois composée.

(**) R. Levy est mort à Hanovre le 18 mai 1779. Il enseigna les mathématiques dans cette ville; un de ses disciples, lord anglais, lui légua, par testament, mille écus, et, en cas de mort, à ses héritiers. Cette somme a été, en effet, remise à sa fille Ève, qui épousa, du vivant de son père, un nommé Jacob Hein. Celui-ci, après la mort de son beau-père, étant devenu possesseur du portrait de Leibnitz, le vendit au gouvernement de Hanovre, lorsqu'il érigea un monument à Leibnitz par souscription. Hein a souscrit pour 200 écus.

M. le Dr Gerhardt, de Saltzwedel, a découvert à Hanovre des manuscrits de Leibnitz; il y a une lettre datée de Paris le 29 octobre 1675, dans laquelle Leibnitz parle du calcul différentiel et intégral, et avec les signes aujourd'hui généralement adoptés. C'est peut-être de ce jour qu'on doit dater la découverte de cette notation créatrice (*Moniteur* du 11 juillet 1851). Il a publié sa méthode en 1684 dans les *Acta*.

THÉORÈME SUR LE PENTAGONE;

Par M. MENTION.

1. Théorème. *Un pentagone donne lieu à cinq quadrilatères en prolongeant ses côtés de deux en deux; et chaque quadrilatère a une médiane* (*). *Les cinq médianes se coupent au même point.*

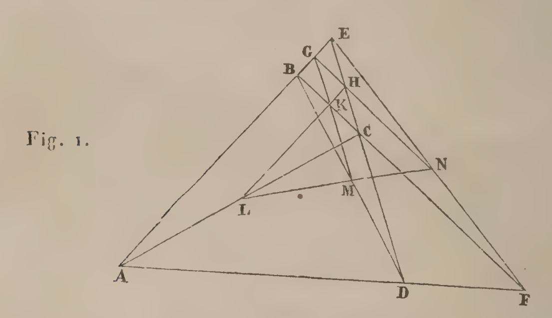
M. Terquem a demandé une démonstration du théorème dont il s'agit, indépendante de la théorie des coniques, et les *Annales* de 1847 renferment une Note de M. Paul Serret à ce sujet (page 22). Mais l'auteur fait usage des coordonnées, tandis que la géométrie pure doit suffire pour résoudre la question. Il n'est, en effet, littéralement besoin que de regarder la figure.

La méthode segmentaire que j'emploie ici exige quelque attention : il ne faut jamais prendre au hasard les triangles destinés à établir *le concours de plusieurs droites* ou *l'alignement de plusieurs points*. Par exemple, Bobilier, dans sa *Géométrie*, prouve que les trois milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite, au moyen d'une construction auxiliaire qui enlève

(*) J'appelle médiane d'un quadrilatère la droite passant par les milieux de ses diagonales.

à la démonstration une partie de sa simplicité. Cette propriété se conclut *immédiatement* du théorème de Ptolémée; je vais le montrer, parce que cela n'est pas étranger à mon objet principal.

Fig. 1.



Soit donc pris le triangle GHK (*fig.* 1), ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle BEC formé avec trois côtés du quadrilatère ABCD. Ses côtés rencontrant les diagonales aux milieux de celles-ci, on est conduit à faire voir que l'on a

$$\frac{GM}{MK} \cdot \frac{KL}{HL} \cdot \frac{HN}{GN} = 1.$$

Or les six termes du premier membre de cette égalité sont les moitiés des segments déterminés par la sécante ADF relativement au triangle BCE : ces termes seront donc assujettis à la même relation que ces segments.

2. Quant au pentagone, proposons-nous de former un triangle tel, que trois d'entre les cinq médianes aillent aboutir à ses sommets, qui pourront être trois milieux consécutifs des côtés du pentagone tracé avec les rencontres de ceux du proposé.

ABCDE (*fig.* 2) est le pentagone donné, FGHIK est le pentagone formé par les diverses rencontres des côtés du premier. Soient L, M, N les milieux des côtés IK,

IH, HG. Les médianes NX, LX′, MX″ se rapportent aux quadrilatères KEDC, ABEG, AFDE; elles coupent les côtés du triangle LMN en X, X′, X″.

On doit avoir

$$\frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{LX}} \cdot \frac{\mathrm{LX''}}{\mathrm{NX''}} \cdot \frac{\mathrm{NX'}}{\mathrm{MX'}} = 1.$$

Soit α le milieu de KD; les lignes Lα, MX′, IG étant parallèles, j'écris les proportions

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{LX}} = \frac{\mathrm{L}\alpha}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{ID}}.$$

Soit β le milieu de AG; les lignes Nβ, MX étant parallèles, j'écris encore

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{NX'}}{\mathrm{MX'}} = \frac{\mathrm{N}\beta}{\mathrm{ML}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{KH}}.$$

Soit δ le point d'intersection des droites MX″ et Nβ, il me vient d'abord

$$\frac{\mathrm{LX''}}{\mathrm{NX''}} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{N}\delta}.$$

Mais le milieu γ de AD est sur MX″, et les trois lignes $\gamma\beta$, IG, MN sont parallèles; donc

$$\frac{\mathrm{N}\beta}{\delta\beta} = \frac{\gamma\beta}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{IG}};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{N}\delta}{\mathrm{N}\beta} = \frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{ID}},$$

et

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{N}\delta} = \frac{\mathrm{ML}.\mathrm{ID}}{\mathrm{N}\beta.\mathrm{IG}} = \frac{\mathrm{HK}.\mathrm{ID}}{\mathrm{AH}.\mathrm{IG}}.$$

Conséquemment, le produit des rapports (1), (2), (3) est égal à l'unité. C. Q. F. D.

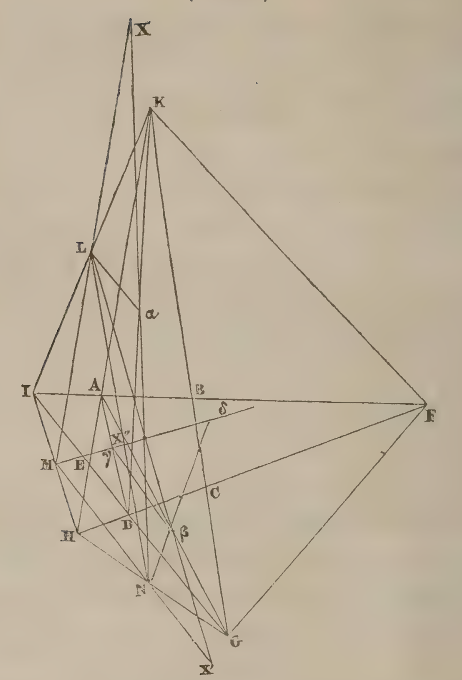


Fig. 2.

Remarque. Les conditions pour que les cinq médianes soient parallèles découlent très-simplement de notre démonstration. Ainsi les deux lignes MX et NX′ seront parallèles si

$$\frac{MX}{LX} = \frac{MX'}{NX'} \quad \text{ou} \quad \frac{KH}{AH} = \frac{IG}{ID}.$$

De même,

$$\frac{KH}{KE} = \frac{IF}{IB} \cdots$$

A proprement parler, ce sont les conditions de circonscriptibilité d'un pentagone à la parabole, et, au fond, on retombe sur la propriété si connue de cette courbe, qu'une tangente quelconque intercepte sur les deux côtés d'un angle circonscrit des segments proportionnels.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez Mallet-Bachelier, libraire, quai des Augustins, 55.

Précis des Œuvres mathématiques de Pierre Fermat et de l'Arithmétique de Diophante; par M. *E. Brassine,* professeur à l'École impériale d'artillerie de Toulouse, de l'Académie des Sciences de cette même ville. Toulouse, 1853; 1 vol. in-8° de 164 pages; 2 planches lithographiées. Prix : 3 fr. 50 c.

« Pierre Fermat, dit M. Brassine dans son introduction (pages 1 à 10), est considéré par les premiers géomètres de notre époque comme l'inventeur du calcul infinitésimal et comme le fondateur de la théorie des nombres. Ses découvertes géométriques et ses théorèmes d'arithmétique, qui sont encore aujourd'hui un sujet de recherches et de méditations pour les savants, sont développés et énoncés dans le recueil de ses Mémoires publiés il y a près de deux siècles (en 1679), et dont on trouve quelques rares exemplaires dans les principales bibliothèques. Une nouvelle édition de ces précieux fragments était devenue depuis longtemps nécessaire; le Gouvernement, convaincu de son utilité, présenta en 1843 (1er et 19 juillet), aux Chambres législatives, un projet de loi dans lequel un crédit de 15000 francs était demandé pour la réimpression, aux frais de l'État, des Œuvres complètes de P. Fermat. Le projet de loi fut voté sans discussion et à une grande majorité; malheureusement, des circonstances et des difficultés que nous ne connaissons pas empêchèrent l'effet de ce vote, et la réimpression n'eut pas lieu.

« Peut-être la Commission chargée de préparer la nouvelle édition a-t-elle hésité, après avoir examiné le texte original, à faire réimprimer des fragments écrits en latin sous une forme abandonnée et avec des notations incommodes qui en rendent l'étude pénible et difficile... (*). »

Le silence d'une Commission peut être interprété de plusieurs manières : celle que nous venons de citer est assurément l'une des plus charitables et fait honneur à l'esprit bienveillant de M. Brassine. Quoi qu'il en soit, le savant professeur de Toulouse, adoptant les motifs *présumés* de la Commission, en a conclu, non pas qu'il n'y avait rien à faire, mais qu'un Précis où l'on trouverait, sous une forme substantielle et avec des notations commodes, les principaux travaux de Fermat, serait plus utile qu'une simple réimpression des Œuvres du grand géomètre, et il a entrepris l'ouvrage dont nous allons tâcher de donner une idée à nos lecteurs.

La première partie (pages 11 à 46) est un résumé complet des Mémoires renfermés dans les *Varia opera mathematica* publiés à Toulouse en 1679 par Samuel de Fermat, fils de l'auteur. On y trouve, sous le titre d'*Introduction aux lieux plans*, un Traité concis de géométrie analytique, comprenant la théorie de la ligne droite et des courbes du second degré; deux Mémoires d'algèbre, contenant une première ébauche de la théorie générale de l'élimination, et un procédé pour débarrasser les équations des radicaux qu'elles renferment; deux fragments sur la méthode *de maximis et minimis*, sur les tangentes, sur les quadratures, premiers linéaments de la méthode infinitésimale; divers articles de géométrie ancienne. M. Brassine fait ressortir avec beaucoup de clarté tout ce

(*) Ces inconvénients sont réels; mais un bon commentaire les ferait disparaître.

qui appartient en propre à son auteur; mais peut-être aurait-il dû distinguer plus nettement ce qui est résumé de ce qui est citation textuelle.

La seconde partie (pages 47 à 131) contient les énoncés des propositions qui entrent dans les six livres de Diophante, et offre aux professeurs une très-belle collection de problèmes arithmétiques. Les observations de Fermat, si riches de beaux théorèmes, malheureusement sans démonstration, ont été traduites avec soin. C'est là surtout que Fermat s'est montré créateur.

La troisième partie (pages 131 à 164) renferme des extraits des Lettres de Fermat, et ce n'est pas la moins intéressante. Il règne, dans la correspondance des grands géomètres du XVIIe siècle, une simplicité, une candeur qui les font autant aimer qu'admirer. A une profonde vénération pour leurs devanciers, ils joignaient une vive ardeur pour la découverte des vérités nouvelles : conciliant ainsi deux excellentes choses, la tradition et le progrès. On ne les voit point reprocher à la science d'être trop étendue ou trop abstraite, ni l'accuser d'inspirer l'orgueil ou de frapper les esprits de stérilité. Ces fameuses découvertes appartiennent au XIXe siècle, qui, s'il est modeste, ne devra pas trop s'en vanter (*).

M. Brassine nous paraît avoir complétement atteint le

(*) « *Quelques géomètres* veulent que l'intelligence des élèves soit obligée de déduire toutes les vérités de leurs *principes les plus abstraits,* et qu'elle s'assouplisse par cette gymnastique qui la rend à la fois plus subtile et plus féconde en ressources pour l'argumentation. Cette méthode réussit à quelques esprits *rares,* mais elle décourage le plus grand nombre; elle inspire un *orgueil* d'autant plus dangereux *à ceux qu'elle n'arrête pas,* qu'elle les frappe presque toujours de *stérilité sous le rapport de l'invention;* elle fait naître chez la plupart des élèves une foule d'idées fausses, ou, du moins, elle les dispose à en devenir les victimes. »

L'auteur du Rapport auquel nous empruntons ce passage est un chimiste très-estimé; mais, comme en géométrie, il n'y a pas d'autre auto-

but qu'il s'était proposé, savoir de faire connaître les travaux du grand géomètre dont la France s'honore. Quelques monographies de ce genre seraient extrêmement précieuses pour l'histoire des mathématiques.

E. Prouhet.

Della Vita et delle Opere di Guido Bonatti, astrologo ed astronomo del secolo decimoterzo; notizie raccolte da *Baldassarre Boncompagni*. Roma, 1851; in-8 de 267 pages.

C'est le recueil le plus complet et le mieux discuté de tout ce qu'on a publié sur ce singulier personnage, qui jouissait d'une grande réputation au XIII[e] siècle. Il est né à Cascia, village de la Toscane, dans le Val d'Arno. Étant du parti des Gibelins, il fut fort maltraité par les Guelfes et forcé de quitter Florence; il habita longtemps à Forli,

---

rité que celle de la raison, et que les princes mêmes de la science se discutent, nous ne croyons pas être trop hardi en joignant à l'endroit cité les observations suivantes :

Quelques géomètres : Lisez Lagrange, Laplace, Poisson, etc., c'est-à-dire nos plus grands géomètres.

Les principes les plus abstraits : Le mot abstrait semble pris ici dans son acception vulgaire, comme synonyme de difficile. Les grands géomètres dont nous venons de parler pensaient que les principes les plus généraux, et, par conséquent, les plus abstraits, sont les plus faciles à saisir. Je n'ose pas leur donner tort.

Ceux qu'elle n'arrête pas : Sont-ce les esprits rares dont on vient de parler et auxquels la méthode réussit? Singulière manière de réussir!

Orgueil : Terme impropre. La connaissance de la vérité fait naître une vive satisfaction, mais elle n'inspire pas l'orgueil, maladie de l'esprit, due ordinairement à des avantages imaginaires ou d'une importance très-contestable.

Stérilité sous le rapport de l'invention : Pourquoi les auteurs de la nouvelle réforme pédagogique, qui tiennent tant à l'esprit d'invention, ont-ils banni les problèmes, reconnus si propres à le développer? On les a remplacés par la règle à calcul. Nous admirons autant qu'un autre cet utile instrument; mais nous doutons qu'il puisse donner beaucoup d'idées aux ingénieurs. P.

qu'il adopta comme nouvelle patrie, en reniant l'ancienne, et il prit le titre de *Foriliviensis*. On ne connaît pas l'année de sa naissance. On a la certitude qu'il existait déjà en 1223. Il a été astrologue d'un certain comte Guido de Montefeltro, qui s'est emparé, à la manière italienne, du souverain pouvoir à Forli, et qui a fini ses jours dans un cloître. Il paraît qu'il a fait aussi des prédictions à l'empereur Frédéric. Après avoir séjourné longtemps à Bologne, il est venu à Paris, où il a donné des leçons publiques d'astronomie. C'est en revenant de cette ville, et allant à Césène, qu'il fut assassiné sur le grand chemin. On ne connaît pas non plus l'année de cette catastrophe; mais il est mort très-âgé vers la fin du XIIIe siècle. Il y a trois éditions de son ouvrage : la première édition a été publiée à Augsbourg par Errard Radtolt, en 1491. C'est un volume grand in-4° de 422 pages, en caractères gothiques, sans pagination et sans réclame. Sur le recto de la quinzième page, on lit le titre : *Guido Bonatus de Forlivion. Decem continens tractatus astronomiæ*. La deuxième édition est de Venise, 1506; la troisième édition est de Bâle, 1550. Le savant auteur de la Notice décrit avec beaucoup de soin ces éditions; il existe aussi une traduction allemande et des traductions françaises de certaines parties de cet ouvrage, excessivement rare. L'histoire littéraire s'est enrichie ici d'une précieuse acquisition. Puisse l'illustre érudit nous faire connaître de même les richesses de sa vaste bibliothèque mathématique, en y mettant la scrupuleuse conscience que tout le monde devrait et pourrait avoir, et cette critique judicieuse, qui est un don providentiel. L'exécution typographique de ce Mémoire est d'une rare perfection. Cet accessoire est très-essentiel quand il s'agit de reproduire fidèlement l'écriture gothique des manuscrits du moyen âge.

ON BISECTANT AXES, AND THEIR RELATION TO THE RADICAL AXES OF TWO OR MORE GIVEN CIRCLES, BY *T.-T. Wilkinson. F. R. A. S. Burnley.* London, 1852; in-12 de 11 p., figures dans le texte.—*Sur les axes bissecteurs et leurs relations avec les axes radicaux de deux ou de plus de deux cercles.*

Les théorèmes étant d'une extrême facilité, l'énoncé suffit.

1. *Définition.* Une circonférence B est dite *bissectrice* de la circonférence A lorsqu'elle passe par les extrémités d'un diamètre de celle-ci.

2. THÉORÈME. *Le lieu des centres d'un cercle variable* B *passant par un point fixe* P, *et bissecteur d'un cercle donné* A, *est une droite.*

Cette droite est nommée *axe bissecteur.*

3. THÉORÈME. *Le lieu des centres d'un cercle bissecteur de deux cercles donnés est une droite.*

Cette droite est l'axe bissecteur des deux cercles.

4. THÉORÈME. *L'axe bissecteur et l'axe radical de deux cercles sont à égale distance du milieu de la droite qui joint les centres.*

5. Les trois axes bissecteurs de trois cercles passant par le même point, il y a là matière à beaucoup de questions pour les élèves.

A cette occasion, nous recommandons à tous ceux qui veulent s'exercer dans la bonne géométrie, le recueil de quatre cent cinquante théorèmes et problèmes que M. E. Catalan a classés avec tant de méthode, démontrés et résolus avec tant de sagacité et d'adresse, dans la seconde édition des *Théorèmes et Problèmes* de *La Fremoire*, ouvrage nouveau et d'une utilité vraiment classique. Dans une troisième édition, on pourrait ajouter

les théorèmes si féconds sur les faisceaux homographiques et les polyèdres *étoilés*, et même les corps dits *archimédiques*, qui facilitent l'étude de la cristallographie

---

NOTICE HISTORIQUE SUR LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNES (*);

PAR M. A. DE POLIGNAC,
Élève de l'École Polytechnique, aujourd'hui élève à l'École d'application de l'artillerie et du génie, à Metz.

Ératosthènes florissait en Égypte du temps d'Archimède; son savoir immense lui valut d'être nommé, par le troi-

---

(*) Ératosthènes est né à Cyrène dans la 126e olympiade (—276); il fut placé à la tête de la Bibliothèque alexandrine par Ptolémée Évergète, dans la 139e olympiade (— 226); il occupa cette place sous le règne entier de Philipator et jusqu'à la 10e et 12e année de Ptolémée Épiphanes. Sa vue s'étant considérablement affaiblie, il s'est laissé mourir de faim l'an —194 ou —196. Voici la liste des ouvrages dont les noms se sont conservés :

1°. Καταστερισμῶν, *Description des astres et leur histoire fabuleuse.* C'est le seul ouvrage qui nous soit parvenu; la première édition a été entreprise par J. Fellus, *Oxon*, 1672; in-8, avec des Notes. On le trouve avec une traduction latine dans les *Opuscula Physica et Ethica,* de Thomas Galeus; Amst., 1688; in-8. Le P. Petau a inséré cet ouvrage dans son *Uranologia*; Paris, 1630; et réimprimé, Amst., 1703; in-fol. Il en attaque l'authenticité, parce qu'on y trouve : 1° le nom d'Hipparque; 2° le nom du mois de juillet, postérieur à Ératosthènes; 3° le mot barbare ἀλεκτροπόδιον, par lequel les Grecs plus modernes ont désigné Orion;

2°. Αριθμητικὴ; citée par Théon de Smyrne, Jamblique, et d'autres;

3°. Ἀρχιτεκτονικόν, *de l'Architecture;* cité par Sophocle, scholiaste d'Apollonius; lib. I, v. 29;

4°. Ἀσθρονομὶα; cité par Suidas;

5°. Γεωγραφόμενα, *Geographica;* citée par plusieurs et par César, *de Bello Gallico,* VI, 24;

6°. Γνωμονίχά; attribué à Ératosthènes, d'après un endroit de Censorinus;

7°. Κοσχὶνον, *Cribrum arithmeticum;* la construction nous a été conservée par Nicomaque; *Arithm.*, lib. I, cap. 17; il paraît que c'est extrait de l'arithmétique (2°);

8°. Ἐπὶστολαι; Lettre à Hégétore, Lacédémonien; citée par Macrobe;

sième Ptolémée, bibliothécaire de la célèbre bibliothèque d'Alexandrie. Il excellait à la fois dans la philosophie, les mathématiques, l'éloquence, la poésie et dans la science des antiquités; aussi est-il désigné parfois sous le nom de πένταθλος (*) : c'est ainsi que les anciens nommaient ceux qui, aux jeux olympiens, avaient été vainqueurs à la fois dans les cinq exercices.

Ses travaux mathématiques, dirigés principalement vers l'astronomie et la géométrie, lui méritèrent d'être associé dans l'admiration des anciens aux trois célèbres géomètres : Aristée, Euclide, Apollonius. Il travailla moins la science des nombres que Pythagore ou Diophante, mais il laissa cependant sur ce sujet une méthode fort ingénieuse pour trouver indirectement tous les nombres premiers.

Je n'expliquerai point ici cette méthode, qui maintenant se trouve dans plusieurs Arithmétiques, et que les anciens désignaient sous le nom de *Crible d'Ératosthènes*, attendu qu'Ératosthènes arrivait à la connaissance des

---

V, 21; à Ptolémée, sur la Duplication du cube; conservée par Eutocius dans son Commentaire sur la sphère d'Archimède, et éditée par Fellus, nommée ci-dessus;

9°. Περὶ κωνικῶν τομῶν, *sur les sections du cône;* cité par le commentaire de Proclus sur Euclide, lib. II, p. 31: c'est le seul passage qu'on cite ordinairement pour montrer qu'Ératosthènes a traité des sections coniques; mais ce passage est relatif à la Lettre sur la duplication du cube, adressée à Ptolémée;

10°. Μετρησεῖς, *Dimensions des planètes;* citée par beaucoup d'anciens, Vitruve, Pline, etc.

Ceux qui désirent plus de détails doivent consulter la Bibliothèque grecque de Fabricius; tome IV, pages 117-127, nouvelle édition, 1795. Tm.

(*) Il fut aussi surnommé βῆτα; les uns disent parce qu'il occupe dans toutes les sciences au moins la seconde place; d'autres parce qu'il était le second bibliothécaire en chef de la bibliothèque alexandrine. Le premier fut Zénodote, le second Ératosthènes, le troisième Apollonius, et le quatrième Aristonyme; cependant on n'a pas surnommé Zénodote par la lettre α, etc. Tm.

nombres premiers par l'exclusion de tous ceux qui ne l'étaient pas. Depuis, quelques auteurs ont travaillé là-dessus, mais sans rien ajouter d'intéressant à ce qu'avait fait l'inventeur.

Ces auteurs sont : 1° Nicomaque de Gerasè, qui vivait dans le IVe ou Ve siècle, et qui, dans son Εἰσαγωγὴ Ἀριθμητική, tout en cherchant à amplifier le principe d'Ératosthènes, l'a un peu dénaturé;

2°. Johannes Grammaticus, commentateur de Nicomaque;

3°. Bœtius (Boëce), dont le Traité sur l'arithmétique (*Isagoge. Arithm.,* Beotii, *Arithm.,* lib. II), n'est guère qu'un abrégé de celui de Nicomaque;

4°. Enfin Horsley, qui lut, en 1772, un Mémoire (imprimé dans le tome LXII des *Philosophical Transactions,* pages 327 et suivantes), ayant pour titre : « ΚΟΣΚΙΝΟΡ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΟΥΣ, *on the sieve of Eratosthenes; Being an account of his method of finding all the prime numbers; by the Rev.* Samuel Horsley. F. R. S. (*). »

Horsley s'efforce, dans cet ouvrage, de rétablir le véritable esprit de la méthode d'Ératosthènes, méthode qu'il regarde comme un des plus précieux legs de l'antiquité. Il remarque que cette méthode était à peine connue de son temps. C'est donc peut-être à Horsley que nous sommes redevables de la vulgarisation de cette découverte. Au reste, l'auteur anglais n'a absolument rien ajouté de son propre fonds; il se contente de donner, comme appartenant à Ératosthènes, exactement le même procédé qu'on enseigne aujourd'hui dans presque tous les cours.

Horsley, pour donner un exemple de cette méthode, écrit les nombres impairs consécutifs de 3 à 157. Dans ce tableau, il raye les termes de 3 en 3, mais non com-

(*) Éditeur des OEuvres de Newton. Mort en 1806. TM.

pris 3, de 5 en 5, mais non compris 5, et ainsi de suite pour 7 et 11. Alors il remarque que tous les nombres non rayés, et ceux-là seuls, sont premiers dans le tableau considéré.

On pourra voir clairement en quoi la méthode que j'emploie pour l'étude des nombres premiers diffère du procédé d'Ératosthènes; en effet, le savant grec n'ayant en vue que de trouver le plus vite possible un grand nombre de nombres premiers, ne s'arrête pas, après un certain nombre d'opérations, pour examiner dans quel ordre se suivent les nombres rayés et non rayés dans la suite infinie des nombres impairs. Or, c'est là dedans que consiste toute la méthode de la diatomie; il était donc impossible qu'Ératosthènes trouvât aucune loi dans son *Crible* (*).

Legendre, dans son *Essai sur les nombres* (2e édition), lorsqu'il croit démontrer que, dans toute progression arithmétique, il y a une infinité de nombres premiers, s'appuie sur des considérations qui auraient dû le conduire aux suites diatomiques s'il les avait poussées plus loin; mais l'idée de périodicité lui a manqué, et c'est à cela qu'il faut attribuer l'inexactitude de sa démonstration.

Je n'ai pas connaissance d'autres ouvrages se rapprochant de la considération des suites diatomiques. Je suis donc fondé à croire que cette méthode est entièrement neuve, ou du moins qu'elle emprunte bien peu de chose au *Crible* d'Ératosthènes (**).

(*) *Voir* t. VIII, p. 423.

(**) Dans l'ouvrage de l'abbé Privat de Molières : *Leçons de Mathématiques nécessaires pour l'intelligence des principes de Physiques qui s'enseignent actuellement au Collége royal*, 1726, in-12, on trouve des procédés rapides pour former une Table de nombres premiers. PROUHET.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE MAXIMUM RELATIVE A LA SPHÈRE;

PAR M. OSSIAN BONNET.

M. Jellett, dans le cahier du Journal de M. Liouville qui vient de paraître, a essayé de déduire, du calcul des variations, ce théorème connu : *Parmi toutes les surfaces* FERMÉES *de même contour, la sphère est celle qui comprend le plus grand volume.* Pour cela, l'habile géomètre de Dublin se propose de démontrer que la sphère est la seule surface fermée dont la courbe moyenne soit constante. La question ainsi posée paraît présenter de très-grandes difficultés; aussi M. Jellett n'a-t-il pu en venir à bout qu'en se bornant à considérer des surfaces fermées telles, que des droites, issues d'un point de leur intérieur, ne les coupent qu'en un point. Or, il me semble, tout en reconnaissant l'importance de la question traitée par M. Jellett, qu'on peut éviter ces difficultés quand il ne s'agit que d'établir la propriété de maximum relative à la sphère, et arriver simplement au but de la manière suivante.

I.

Soit A la surface fermée qui, parmi toutes celles qui ont une étendue égale à $4\pi a^2$, comprend le plus grand volume. Cette surface devra satisfaire à la condition

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{2}{b}, \tag{1}$$

R et R' étant les rayons de courbure principaux, et b une constante.

Mais au moyen d'un théorème démontré par M. Jel-

lett, on voit facilement que S étant l'étendue, et V le volume de la surface A, on doit voir, par cela même, que cette surface remplit la condition (1)

$$V = \frac{b}{3} S,$$

ou bien, d'après la valeur de S,

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Cela nous montre déjà que b doit être $\gtreqless a$, car sans cela la sphère de surface $4\pi a^2$ aurait un volume $\frac{4}{3}\pi a^3$ plus grand que le volume de la surface A, ce qui est contraire à l'hypothèse.

D'un autre côté, si l'on met l'équation (1) sous la forme

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2 = \frac{4}{b^2} - \frac{4}{RR'},$$

que l'on multiplie par l'élément dS de la surface A et qu'on intègre en étendant l'intégration à tous les éléments de la surface, il viendra

$$\text{S ou bien } 4\pi a^2 = 4\pi b^2 + \frac{b^2}{4} \int\int \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2 dS,$$

car

$$\int\int \frac{dS}{RR'} = 4\pi,$$

d'après un théorème démontré pour la première fois par M. Olinde Rodrigues dans la Correspondance de l'École Polytechnique. Donc

$$b \leqq a;$$

rapprochant le résultat de celui qui a été obtenu plus haut, on en conclut

$$b = a,$$

par suite

$$\iint \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2 dS = 0,$$

et enfin

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'};$$

ce qui prouve que la surface A est une sphère.

II.

On peut établir plus simplement que ne le fait M. Jellett le théorème au moyen duquel il prouve que, pour toute surface fermée satisfaisant à l'équation (1), on a, entre le volume V et la surface S, la relation

$$V = \frac{b}{3} S.$$

En effet, soient V le volume compris dans une surface fermée quelconque A, r le rayon vecteur de cette surface issu d'un point de son intérieur, dS son élément superficiel, α l'angle de la normale extérieure avec le rayon vecteur r; on a, comme on sait,

$$3V = \iint r \cos \alpha \, dS,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la surface.

Considérons maintenant la surface obtenue en dilatant d'une quantité infiniment petite δn la surface A; on aura de même, pour cette seconde surface,

$$3(V + \delta V) = \iint [r \cos \alpha + \delta (r \cos \alpha)] (dS + \delta dS),$$

d'où

$$3\,dV = \iint \delta (r \cos \alpha)\, dS + \iint r \cos \alpha \, \delta dS.$$

Or

$$\delta V = S \delta n, \quad \delta (r \cos \alpha) = \delta n, \quad \delta dS = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \delta n \, dS;$$

donc

$$2\,S = \int\int r\cos\alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)dS.$$

C'est le théorème de M. Jellett.

Si, au lieu d'une surface fermée, on considérait une portion de surface A terminée à un contour fermé C, en appelant V le volume compris entre cette portion de surface et le cône qui a la courbe C pour base et l'origine des rayons vecteurs r pour sommet, on aurait encore

$$3\,V = \int\int r\cos\alpha\, dS,$$

puis

$$3\,\delta V = \int\int \delta\,(r\cos\alpha)\,dS + \int\int r\cos\alpha\,\delta dS,$$

et enfin

$$\delta\,(r\cos\alpha) = \delta n,\quad \delta dS = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta n\, dS;$$

mais δV ne serait pas égal à $S\delta n$, comme précédemment; cet accroissement se composerait en outre d'un petit volume qu'il est très-facile d'évaluer et que l'on trouve égal à

$$\delta n \int p ds,$$

ds étant l'élément du contour C, p la perpendiculaire (avec un signe) abaissée de l'origine des rayons vecteurs r, sur le plan mené par la tangente à la courbe C, normalement à la surface A, et l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la courbe C; de telle sorte que l'on a alors

$$2\,S = \int\int r\cos\alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)dS - \int p ds.$$

Cette relation, plus générale que celle qui a été obtenue plus haut et qui donne une interprétation géométrique d'un autre résultat de M. Jellett, peut être utile dans différentes circonstances.

On peut d'une manière analogue déduire de l'égalité

$$(2) \qquad 2\,S = \iint r\cos\alpha\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS,$$

un dernier théorème de M. Jellett, d'après lequel

$$2\iint r\cos\alpha\,\frac{dS}{RR'} = \iint\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS.$$

En effet, appliquons la relation (2) à deux surfaces parallèles infiniment voisines; nous aurons

$$\begin{aligned} 2\,\delta S = &\iint \delta(r\cos\alpha)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS \\ &-\iint(r\cos\alpha)\left(\frac{\delta R}{R^2}+\frac{\delta R'}{R'^2}\right)dS \\ &+\iint(r\cos\alpha)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\delta\,dS, \end{aligned}$$

ou bien, en remarquant que

$$\delta S = \delta n\iint\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS, \qquad \delta(r\cos\alpha) = \delta n,$$

$$\delta R = \delta R' = \delta n, \qquad \delta\,dS = \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\delta n\,dS,$$

il vient

$$2\iint(r\cos\alpha)\frac{dS}{RR'} = \iint\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS,$$

comme il fallait le démontrer.

Je terminerai par cette remarque qui, je crois, n'a pas été faite : *Toute surface dans laquelle le produit des rayons de courbure principaux a la même valeur, est parallèle à une surface de courbure moyenne constante.* En effet, soit

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'} = \frac{2}{a}$$

l'équation d'une surface à courbure moyenne constante;

si nous dilatons la surface de la quantité $\frac{a}{2}$, l'équation précédente deviendra

$$RR' = \frac{a^2}{4}.$$

NOTE SUR LES DÉRIVÉES DE LOG x ET ARC TANG x ET SUR LEURS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE;

Par M. l'Abbé SOUFFLET,
Professeur, docteur ès sciences mathématiques.

1°. Rappelons d'abord que

$$\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x x_1^{m-2} + \ldots + x^{m-1},$$

m étant entier et positif. Si l'on fait $x_1 = x$, ou aura, limite de $\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou dérivée de $x^m = mx^{m-1}$. Ainsi la dérivée de x sera x^0 ou 1, celle de x^2 sera $2x$, et en général celle de ax^m sera limite de $a \times \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$, ou max^{m-1}. Réciproquement, x_0, x, x^2, x^3, etc., *dériveront* respectivement de x, $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^4}{4}$.

2°. La dérivée de $\log x$ est, par définition, la limite de

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h}, \text{ ou de } \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}, \text{ ou de } \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x},$$

si l'on fait $h = \alpha x$, α et h étant infiniment petits en même temps.

Or les progressions logarithmiques

$$1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 \ldots,$$
$$0 . \quad k\alpha \quad . \; 2k\alpha \ldots,$$

donnent, par *définition*,

$$k\alpha = \log(1+\alpha),$$

quel que soit α ; donc la dérivée de

$$\log x = \frac{k\alpha}{\alpha x} = \frac{k}{x};$$

puisque nous avons

$$k = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

il s'ensuit que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est la base du système logarithmique dont le module $k=1$, et en la désignant par e, nous aurons

$$k = \log e.$$

3°. Il est évident que la dérivée de $\log(1+x)$ est $\frac{k}{1+x}$, puisque, en remplaçant $1+x$ par y, on serait ramené au cas précédent. Or, une simple division de 1 par $1+x$ donne

$$\frac{k}{1+x} = k(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$$

pour dérivée de $\log(1+x)$; donc, réciproquement,

$$\log(1+x) = k\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Du reste, on sait transformer cette série en une autre très-convergente pour une valeur quelconque de la variable plus grande que l'unité. En supposant $k=1$, on calculera donc $l\,2$, et, par suite, $l\,4$, $l\,5$; d'où l'on déduira $l\,10$ et $\frac{1}{l\,10}$ pour valeur numérique du module k dans le système dont la base est 101. Le module une fois connu, la même série donnera les logarithmes vulgaires.

Remarque. Il semble peu naturel de définir le nombre e par le binôme $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ considéré seul en dehors des

progressions logarithmiques et de le calculer d'avance. Nous préférons la marche précédente, puisque l'on évite ainsi d'employer les séries avant les dérivées. (Voir *les Dérivées et les séries simplifiées*; chez Mallet-Bachelier.)

4°. On a

$$\tang x_1 - \tang x = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x_1 - x)}{\cos x_1 \cos x};$$

donc la dérivée de l'arc x par rapport à tang x ou la limite de $\frac{x_1 - x}{\tang x_1 - \tang x}$ égale la limite de

$$\frac{x_1 - x}{\sin(x_1 - x)} \times \cos x_1 \cos x = \cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + u^2},$$

tang x étant remplacée par u.

5°. En divisant 1 par $1 + u^2$, cette dérivée devient

$$1 - u^2 + u^4 - u^6 + \ldots$$

Donc réciproquement l'arc tang u ou x égale

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \ldots$$

Si l'on fait $u = \frac{1}{5}$, cette série donnera la valeur d'un arc α correspondant; mais

$$\tang 2\alpha = \frac{5}{12}, \quad \tang 4\alpha = \frac{120}{119},$$

et

$$\tang\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239},$$

et si l'on pose

$$u = \frac{1}{239},$$

la série précédente donnera la valeur de

$$4\alpha - \frac{\pi}{4};$$

donc

$$4 \text{ arc tang } \frac{1}{5} - \text{arc tang } \frac{1}{139},$$

ou

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} - \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$

SOLUTION DE LA QUESTION 273

(voir t. XII, p. 259);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
Du petit séminaire d'Iseure.

Le triangle ABC a un sommet fixe A, un angle constant A, les sommets B et C sont sur une droite fixe : quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle?

Prenons pour origine le point A, et pour axe des x la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite fixe. Soit p la longueur de cette perpendiculaire AP, soit α l'angle que la droite AB fait avec l'axe des x. Les coordonnées des points B et C seront

Pour B $\begin{cases} x' = p, \\ y' = p \text{ tang } \alpha; \end{cases}$ pour C $\begin{cases} x'' = p, \\ y'' = p \text{ tang } (A + \alpha). \end{cases}$

Le cercle circonscrit, passant par l'origine A, aura pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Les coordonnées a et b du centre seront

$$b = \frac{p}{2}[\text{tang } \alpha + \text{tang } (A + \alpha)],$$

$$a = \frac{p}{2}[1 - \text{tang } \alpha . \text{tang } (A + \alpha)],$$

et l'équation du cercle deviendra

$$x^2+y^2-px[1-\text{tang}\,\alpha.\text{tang}(A+\alpha)]$$
$$-py[\text{tang}\,\alpha+\text{tang}(A+\alpha)]=0,$$

ou bien, en séparant l'arc α, et posant $\text{tang}\,A=m$,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{tang}^2\alpha.p(x+my)-\text{tang}\,\alpha[m(x^2-2px+y^2)+2py]\\ +[(x^2+y^2)-p(x+my)]=F(x,y,\alpha)=0.\end{array}\right.$$

En éliminant l'angle α entre cette équation et sa dérivée

$$\frac{dF}{d\alpha}=\frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{\cos^2\alpha}p(x+my)$$
$$-\frac{1}{\cos^2\alpha}[m(x^2-2px+y^2)+2py]=0,$$

on trouvera, pour équation de l'enveloppe,

$$[m(x^2-2px+y^2)+2py]^2-4p(x^2+y^2)(x+my)$$
$$+4p^2(x+my)^2=0.$$

Si, après avoir effectué les calculs indiqués et les réductions, on divise par m^2 et qu'on ait égard à la relation

$$\frac{1+m^2}{m^2}=\frac{1+\text{tang}^2A}{\text{tang}^2A}=\frac{1}{\sin^2A},$$

on pourra mettre l'équation de l'enveloppe sous la forme suivante :

$$(2)\qquad (x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)-\frac{4p}{\sin^2A}x+\frac{4p^2}{\sin^2A}\right]=0.$$

L'enveloppe cherchée se compose donc du point A et du cercle

$$\left(x-\frac{2p}{\sin^2A}\right)^2+y^2=4p^2.\frac{\cos^2A}{\sin^4A}.$$

C. Q. F. D.

M. Joseph Sacchi, de Pavie, donne à peu près la même solution.

M. Bellavitis, professeur à l'Université de Padoue, fonde une solution très-courte sur la théorie des figures *dérivées*, théorie encore peu connue en France, et qui aurait besoin d'être expliquée.

QUESTIONS.

282. Soit un polygone quelconque inscrit dans une parabole conique, et pour fixer les idées, prenons un pentagone *abcde*; α, β, γ, δ, ε sont les projections respectives orthogonales des sommets sur la directrice L'aire du pentagone *abcde* est égale à

$$\frac{\alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha + \alpha\gamma.\gamma\delta.\delta\alpha + \alpha\delta.\delta\varepsilon.\varepsilon\alpha}{2p},$$

où p est le paramètre principal. De même pour un autre polygone. (Waring).

283. Dans un quadrilatère plan, trois fois l'aire du triangle formé par le centre de gravité du quadrilatère comme sommet, et un côté A du quadrilatère comme base, plus l'aire du triangle formé par l'intersection des deux diagonales comme sommet, et le côté opposé à A comme base, est égale à l'aire du quadrilatère.

(Möbius.)

284. Soit le quadrilatère plan ABCD; E l'intersection des côtés CB, DA; F l'intersection de BA, CD. Prenons un point quelconque T sur la diagonale AC; par les deux points A et T faisons passer un *premier* cercle; par C et T un *deuxième* cercle : le *premier* cercle coupe AD en P et AB en Q; le *deuxième* cercle coupe CB en R et CD en S. Par les points Q, B, R faisons passer un *troisième* cercle, et par les points P, D, S un *quatrième* cercle: ces deux derniers cercles (troisième et quatrième) coupe-

ront la diagonale BD au même point U. Menons un *cinquième* cercle par les points P, E, R, et un *sixième* cercle par les points Q, F, S: ces deux derniers cercles coupent la troisième diagonale EF au même point V.

Les six cercles se coupent au même point Z, et les six arcs ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, pris d'un même côté, sont semblables.

Soit G l'intersection des deux diagonales AC, BD; les quatre points G, U, T, Z sont sur une même circonférence.

Soit H l'intersection des diagonales AC, EF; les quatre points H, V, T, Z sont sur une même circonférence.

Soit enfin I l'intersection des diagonales BD, EF; les quatre points I, U, T, Z sont sur une même circonférence. (MÖBIUS.)

285. $u = 0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré m entre trois coordonnées. Lorsque le déterminant (*) de cette fonction est *identiquement* nul, l'équation représente un faisceau de m droites.

(O. HESSE.)

286. $u = 0$ est l'équation rendue homogène d'une surface de degré m entre quatre variables. Lorsque le déterminant de la fonction est *identiquement* nul, l'équation représente un cône. (O. HESSE.)

EXERCICES DE CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

(Journal de M. Crelle, tome XLV, page 97; 1853).

Par un point O pris dans un plan, on mène dans l'espace trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, et l'on prend

---

(*) *Voir* la définition, tome X, page 125.

sur ces axes $OX = OY = OZ = 1$; on projette ces longueurs sur le plan en OX_1, OY_1, OZ_1.

On donne $\frac{OY_1}{OX_1} = 0,9$; $\frac{OZ_1}{OX_1} = 0,5$.

On trouve

$$\alpha = X_1OX = 9^\circ\, 50' ; \quad \beta = Y_1OY = 27^\circ\, 31' ;$$
$$\gamma = Z_1OZ = 60^\circ\, 29' ;$$
$$\cos\alpha = OX_1 = 0,9853 ; \quad \cos\beta = OY_1 = 0,8868 ;$$
$$\cos\nu = OZ_1 = 0,4927 ;$$
$$\varphi = X_1OY_1 = 95^\circ\, 11' ; \quad \psi = Y_1OZ_1 = 157^\circ\, 9' ;$$
$$\chi = Z_1OX_1 = 107^\circ\, 49'.$$

2. Par le point O on mène dans l'espace une droite OT, formant, avec chacun des trois axes OX, OY, OZ déterminés comme ci-dessus, un angle de $54^\circ\, 44'$; supposons que ces axes tournent autour de OT d'un angle de 60 degrés et prennent la position OX', OY', OZ', et prenons $OX' = OY' = OZ' = 1$; projetons ces distances sur le plan en OX'_1, OY'_1, OZ'_1 ; on aura, après la rotation,

$$\alpha' = 7^\circ\, 34' ; \qquad \beta' = 56^\circ\, 14' ; \qquad \gamma' = 32^\circ\, 41 ;$$
$$\cos\alpha' = 1,005 ; \quad \cos\beta' = 0,564 ; \quad \cos\gamma' = 0,854 ;$$
$$\varphi' = 101^\circ\, 29' ; \quad \psi' = 163^\circ\, 38' ; \quad \chi' = 94^\circ\, 53'.$$

Les lettres représentent, dans la seconde position des axes, des quantités analogues à celles de la première position.

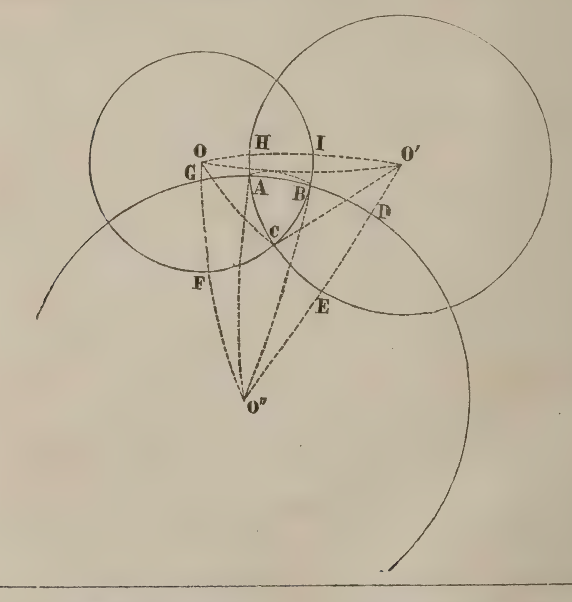
Observation. C'est un calcul de cristallographie pour les cristaux *géminés :* tandis que les trois projections OX_1, OY_1, OZ_1 sont inégales, comme ci-dessus, la projection est dite *anisométrique ;* si deux de ces projections sont égales, la projection est dite *monodimétrique ;* et lorsque les trois sont égales, c'est une projection *isométrique*. Ce dernier genre de projection fait maintenant

partie de l'enseignement graphique à l'École Polytechnique. Les deux premières sont de M. Weisbach et la dernière de M. Farish, Anglais. Nous y reviendrons en 1854.

NOTE SUR L'AIRE DE LA PORTION DE SPHÈRE INTERCEPTÉE ENTRE TROIS ARCS DE PETIT CERCLE (*);

PAR M. H. FAURE.

Soient O, O′, O″ les pôles des petits cercles, ρ, ρ', ρ'' leurs rayons sphériques, A, B, C le triangle formé par leur intersection. Joignons les pôles par des arcs de grands cercles, ils rencontrent les côtés du triangle ou leurs prolongements en des points D, E, F, G, H, I.



(*) Cette question a été traitée par d'Alembert, *Mémoires de Turin*; par

Désignant par T l'aire du triangle A, B, C, on a

$$T = \text{triangle } OO'O'' - (\text{secteur } OIF + \text{sect. } O'HE + \text{sect. } O''GD) + ADE + BGF + CHI.$$

Ces différentes parties sont faciles à évaluer; l'une des dernières, telle que CHI, est la moitié de l'aire sphérique comprise entre les deux cercles O et O'. Joignant le point C aux pôles O et O' par des arcs de grand cercle, on a

$$CHI = \text{sect. } OCI + \text{sect. } O'CH - \text{triangle } OCO';$$

mais

$$\text{sect. } OCI = (1 - \cos\rho)\, COO',$$
$$\text{sect. } O'CH = (1 - \cos\rho')\, CO'O,$$
$$\text{triang. } OCO' = COO' + CO'O + OCO' - 180° = COO' + CO'O - C,$$

C étant l'angle sous lequel se coupent les cercles O et O'; il résulte de là

$$CHI = C - \cos\rho\, COO' - \cos\rho'\, CO'O,$$

de même

$$BGF = B - \cos\rho\, BOO'' - \cos\rho''\, BO''O,$$
$$ADE = A - \cos\rho'\, AO'O'' - \cos\rho''\, AO''O'.$$

D'ailleurs

$$\text{sect. } OIF = O'OO''(1 - \cos\rho),$$
$$\text{sect. } O'HE = OO'O''(1 - \cos\rho'),$$
$$\text{sect. } O''GD = OO''O'(1 - \cos\rho''),$$
$$\text{triangle } OO'O'' = OO'O'' + OO''O' + O'OO'' - 180°;$$

donc

$$T = A + B + C - 180° - (\alpha\cos\rho + \beta\cos\rho' + \gamma\cos\rho'').$$

α, β, γ sont les angles sphériques sous lesquels les côtés du triangle ABC sont vus des trois pôles.

Bossut (*Calcul intégral*), et par M. Quetelet, *Correspondance*, tome VII, page 278; 1832. TM.

On peut donner à cette expression une forme différente, en y introduisant les côtés du triangle ABC. Soient en effet a, b, c ces côtés; on voit facilement que

$$a = \alpha \sin \rho, \quad b = \beta \sin \rho', \quad c = \gamma \sin \rho'',$$

donc

$$T = A + B + C - 180^\circ - (a \operatorname{cotg} \rho + b \operatorname{cotg} \rho' + c \operatorname{cotg} \rho'').$$

Si l'on suppose

$$\rho = \rho' = \rho'' = 90^\circ,$$

on retrouve l'expression connue pour l'aire du triangle sphérique.

Si le cercle qui a O'' pour pôle vient se confondre avec le grand cercle OO', le triangle à évaluer devient alors CHI. Il faut faire, dans la première des expressions précédentes,

$$B + C = 180^\circ, \quad \cos \rho'' = 0, \quad \alpha = COO', \quad \beta = CO'O;$$

on trouve

$$T = A - (COO' \cos \rho + CO'O \cos \rho'),$$

mais le triangle sphérique $OO'C$ donne

$$\frac{\sin COO'}{\sin \rho'} = \frac{\sin CO'O}{\sin \rho} = \frac{\sin A}{\sin \delta} = K,$$

δ étant la distance sphérique des centres; on a donc

$$2T = 2[\operatorname{arc} \sin (K \sin \delta) - \cos \rho \operatorname{arc} \sin (K \sin \rho') \\ - \cos \rho' \operatorname{arc} \sin (K \sin \rho)].$$

C'est la forme que donne M. Townsend à l'expression de l'aire de la sphère comprise entre deux arcs de petits cercles. (Tome IX, page 364.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, EN 1853

(voir p. 226).

Épreuve graphique. — Questions proposées.

Quinze questions ont été proposées à ce concours : quatorze sur les intersections de surfaces, une sur les plans tangents.

Les trois premières, relatives aux sections planes d'un cylindre et d'un cône, conduisent à un résultat tout à fait analogue à un cadran solaire. Les deux suivantes, 4 et 5, traitent le cas de l'intersection de deux surfaces coniques suivant des branches infinies, hyperboliques ou paraboliques.

Les questions 6, 7, 8, 9 et 10, tout en partant des mêmes données, présentent une grande variété dans les résultats : intersection de deux cylindres suivant des courbes fermées, intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution, sections planes, etc.

Les questions 11, 12 et 13, avec des données très-différentes des précédentes, ramènent le dessinateur à la rencontre de deux cylindres, aux trous cylindriques percés dans une sphère, etc.

La quatorzième considère trois surfaces se coupant deux à deux. Dans cette question, ainsi que dans quelques autres, on demande aux élèves de construire séparément le solide commun aux corps qui se rencontrent. Nous croyons cet exercice très-bon et très-propre à rendre familière la lecture des projections.

En résumé, le concours de 1853 offre des questions

très-variées et cependant d'un degré de difficulté graphique à peu près le même; mérite qui avait manqué au concours de 1852.

Intersections de surfaces.

1. *Données.* Un cylindre vertical, tangent au plan vertical et placé en avant de ce plan. Le rayon de la base est de 5 centimètres, la hauteur est indéfinie.

Nommons *plan principal* le plan mené par l'axe, perpendiculairement à la ligne de terre. Dans ce plan, sur le cylindre, en dehors du plan vertical, un point (C.C′) est donné; il est à 10 centimètres au-dessus du plan horizontal.

Dans ce même plan, une droite part du point (C.C′) et va rencontrer le plan horizontal en (D.D′), à 8 centimètres en avant du cylindre.

Il s'agit : 1° de faire passer par le point (C.C′) un plan perpendiculaire à la droite (CD.C′D′) et de décrire dans ce plan, du point (C.C′) comme centre et avec un rayon de 4 centimètres, une circonférence de cercle; 2° de diviser cette circonférence en douze parties égales à partir du plan principal (point zéro), en les numérotant 1, 2, 3, etc., de gauche à droite; 3° de construire l'intersection du cylindre par le plan que détermine la droite (CD.C′D′) et le point n° 1; puis, si le temps le permet, de refaire les mêmes opérations pour les n°s 2 et 3.

2. *Données.* Les mêmes que celles de la première question, à l'exception du *plan principal* qui est remplacé par un plan faisant un angle de 67° 30′ avec le plan vertical de projection. Même travail graphique.

3. *Données.* Qu'on substitue au cylindre de la question précédente un cône droit vertical; au *plan principal*, un plan incliné de 67° 30′ sur le plan vertical de projection, et l'on a l'énoncé de la troisième question.

4. *Données.* Sur le plan horizontal, une ellipse et un cercle touchant l'ellipse intérieurement et la coupant en deux points. Le grand axe de l'ellipse = 9 centimètres, le petit axe = 6 centimètres : ces axes ne sont ni perpendiculaires ni parallèles à la ligne de la terre.

Un point dont la projection horizontale S tombe dans le cercle et dans l'ellipse, et dont la projection verticale S′ est élevée de 10 centimètres environ au-dessus du plan horizontal ;

Deux cônes indéfiniment prolongés, ayant le point (S.S′) pour sommet commun, et pour bases respectives l'ellipse et le cercle ;

Une droite indéfinie passant par le point (S.S′) et rencontrant le plan horizontal en un point (R.R′) plus éloigné de la ligne de terre que ne l'est le point S.

Il s'agit de déplacer le cône à base circulaire parallèlement à lui-même, en faisant monter ou descendre son sommet sur la droite (SR.S′R′), d'arrêter ce cône dans une certaine position, et de construire le résultat de son intersection avec le cône elliptique. On arrêtera le sommet du cône auxiliaire au-dessus du point (S.S′), au tiers de la longueur de la droite (SR.S′R′).

5. *Données.* On substitue à l'ellipse et au cercle se touchant intérieurement et se coupant en deux points, une ellipse et un cercle se coupant en quatre points, et l'on a l'énoncé de la cinquième question.

6. *Données.* Un point (O.O′), situé à 10 centimètres de chacun des plans de projection, est le centre commun d'une sphère S de 4 centimètres de rayon, et d'un cercle horizontal *c* de 2 centimètres de rayon ;

Dans le plan horizontal, le point O est le centre d'un cercle C de 8 centimètres de rayon ;

Une droite (D.D′) part d'un point de la circonférence du cercle C et touche le cercle *c*, de manière à avoir sa

projection horizontale tangente à celle du cercle (on ne prendra pas cette droite parallèle au plan vertical de projection).

Il s'agit de circonscrire un cylindre à la sphère S et de construire l'intersection de ce cylindre avec le cylindre de révolution ayant la droite (D . D′) pour axe et 2 centimètres de rayon.

Nota. On donnera au cylindre circonscrit à la sphère une direction telle que l'intersection des deux cylindres (pénétration ou arrachement) ne se réduise pas à des droites, et qu'elle soit convenablement disposée.

7. *Données.* Les mêmes que celles de la question précédente.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection de la sphère S par le cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D . D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de mener au cylindre deux plans tangents parallèles entre eux et non perpendiculaires à l'un ou à l'autre des plans de projection, et de construire les cercles suivant lesquels ces plans coupent la sphère.

8. *Données.* Les mêmes que celles des sixième et septième questions.

Il s'agit : 1° de percer dans la sphère S le trou qu'y ferait un cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D . D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de faire une coupe de la sphère et de son trou cylindrique par un plan vertical passant par l'axe du cylindre.

Nota. Le cylindre sera tracé en pointillé, sans distinction de parties vues ou cachées, et la coupe verticale sera reportée parallèlement à elle-même jusqu'à 10 centimètres environ de la position donnée, puis rabattue sur le plan horizontal.

On tracera des hachures au crayon sur la partie solide

du trou, la partie de la sphère antérieure au plan coupant étant supposée enlevée.

9. *Données*. Les mêmes que celles des trois questions précédentes.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection de la sphère S avec le cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D . D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de mener deux plans tangents au cylindre, par un point P distant de 15 centimètres environ du centre de la sphère et de chacun des plans de projection; 3° de construire les cercles suivant lesquels ces plans tangents coupent la sphère.

10. *Données*. Celles des questions 6, 7, 8 et 9.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection de la sphère S par le cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D . D′) et 2 centimètres de rayon; 2° de construire séparément les projections du solide commun à la sphère et au cylindre.

Nota. Afin de bien représenter le solide dont il s'agit, on déterminera sur la surface de ce solide un certain nombre de génératrices du cylindre et de circonférences provenant de sections faites dans la sphère par des plans perpendiculaires à la droite (D . D′).

11. *Données*. Un point (O . O′), situé à 10 centimètres de chacun des plans de projection, est le centre d'une sphère S de 4 centimètres de rayon et d'un cercle horizontal *c* dont le rayon a 1 centimètre $\frac{1}{2}$;

Dans le plan horizontal, le point O est le centre d'un cercle C de 8 centimètres de rayon, sur la circonférence duquel trois points *m*, *n*, *p* forment un triangle équilatère : par ces points passent trois génératrices M, N, P de l'hyperboloïde à une nappe qui aurait le cercle C pour trace et *c* pour cercle de gorge;

L'axe de tout le système est le diamètre vertical de la sphère S.

Il s'agit de construire les courbes de pénétration de la sphère par trois cylindres de révolution de même rayon que le cercle de gorge de l'hyperbole, et ayant pour axe une des trois génératrices M, N, P.

Nota. Chaque cylindre sera limité, en bas par le plan horizontal de projection, en haut par un plan perpendiculaire à son axe et distant de 6 centimètres du centre (O.O′) de la sphère S. Le triangle *mnp* n'aura pas de côté parallèle ou perpendiculaire au plan vertical.

12. *Données.* Les mêmes que celles de la question précédente.

Il s'agit de percer dans la sphère S les trous résultants du passage de trois cylindres de révolution de même rayon que le cercle de gorge de l'hyperboloïde, et ayant pour axes les génératrices M, N, P.

Nota. Dans la mise à l'encre, on supposera que les cylindres ont été enlevés; seulement on en conservera le souvenir en figurant leurs traces et leurs contours en pointillé (traits longs, égaux et également espacés), sans distinction des parties vues et des parties cachées.

13. *Données.* Une droite (D.D′) dont les projections font chacune un angle de 45 degrés avec la ligne de terre;

Une ellipse E, située sur le plan horizontal, dont les axes de 10 centimètres et de 6 centimètres ne sont ni l'un ni l'autre parallèles à la ligne de terre;

Tracez les limites des projections d'un cylindre ayant pour base l'ellipse E, et pour génératrices des droites parallèles à (D.D′);

Considérez ensuite les deux plans tangents ayant pour traces les deux droites qui limitent la projection horizontale de ce cylindre, et imaginez un cylindre à base circulaire auquel ces deux plans soient aussi tangents et dont les génératrices ne soient pas parallèles à celles du cylindre elliptique.

Il s'agit de construire l'intersection des deux surfaces cylindriques.

14. *Données.* Un triangle équilatéral *abc* de 5 centimètres de côté, situé dans un plan horizontal élevé de 5 centimètres au-dessus de la ligne de terre;

Trois sphères ayant leurs centres aux points a, b, c et un rayon commun de 5 centimètres.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection des trois sphères; 2° de détacher par un mouvement de transport parallèle le solide commun à ces trois sphères, et d'en faire séparément les projections.

Plans tangents.

15. *Données.* Un hyperboloïde à une nappe dont l'axe est vertical; sa trace a 5 centimètres de rayon; le cercle de gorge, de 4 centimètres de rayon, est élevé de 5 centimètres au-dessus du plan horizontal; l'hyperboloïde est limité dans sa partie supérieure par un plan horizontal élevé de 9 centimètres au-dessus de la ligne de terre;

Une droite (D.D′) qui fait avec le plan horizontal un angle plus grand que celui de la génératrice rectiligne de l'hyperboloïde avec le même plan.

Il s'agit : 1° de construire le contour de la projection verticale de l'hyperboloïde; 2° de mener une suite de plans parallèles à la droite (D.D′) et tangents à la surface, et de tracer le lieu des points de contact de tous ces plans.

ENSEIGNEMENT GRAPHIQUE.

Note du Rédacteur. Nous croyons être utile à l'enseignement graphique en ramenant l'attention sur une collection dont nous avons déjà parlé (tome X, page 453), et qui depuis est entrée dans presque tous les grands éta-

blissements de Paris et dans plusieurs lycées de province, et qui devra trouver place dans toutes les grandes institutions. Le catalogue ci-joint peut servir de guide et fournir de nombreux sujets d'exercices; nous aurions désiré y rencontrer quelques exemples de cristaux hémitropes, géminés, etc., formes insolites, où les yeux sont d'utiles auxiliaires. On peut tout demander à l'habileté et tout attendre de la science et du zèle du chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique. Déjà M. Bardin s'est fait connaître avantageusement par la publication d'un atlas d'épures avec texte, sous le titre de *Notes et croquis de géométrie descriptive* (*); titre rare, car il tient plus qu'il ne promet.

COLLECTION DE CORPS SOLIDES

DESTINÉS A L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

PAR M. BARDIN.

Cette collection, qui doit servir à des élèves ayant étudié la géométrie élémentaire, commence par les intersections des surfaces pyramidales et des surfaces prismatiques.

Les pyramides et les prismes, les polyèdres irréguliers, les polyèdres réguliers et leurs dérivés à points (polyèdres étoilés); les polyèdres symétriques, etc., considérés isolément, appartiennent à une autre série qui constitue un premier enseignement dans lequel il n'est question que de la nomenclature des grandeurs figurées de la géométrie. La vue des objets suffit pour rendre facile et attrayante la première étude de ces grandeurs,

---

(*) A Paris, chez Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55.

surtout si l'on a soin de les proposer pour sujets dans les exercices élémentaires du dessin d'imitation.

INTERSECTIONS DE POLYÈDRES.

PRISME ET PYRAMIDE. *Pénétration* suivant des lignes d'entrée et de sortie distinctes : les deux *corps réunis;* — séparément, le *prisme pénétré* et la *pyramide pénétrante;* — le *solide commun* aux deux corps; — la *coupe verticale* du prisme pénétré.................................. 5 modèles.

— *Arrachement* suivant une ligne fermée : les deux *corps réunis;* — séparément, le *prisme arraché* et la *pyramide arrachante;* — le *solide commun*..................... 4 modèles.

— Cas où les deux solides ont un plan rasant (*) commun : *pénétration réciproque* suivant des lignes d'entrée et de sortie qui se croisent; — les deux *corps réunis* (toit d'arête prismo-pyramidal)........................... 1 modèle.

PRISME ET PRISME. *Arrachement* suivant une ligne fermée.... .... 1 modèle.

— Cas où les deux corps ont deux plans rasants communs : *pénétration réciproque* suivant deux lignes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (toit d'arête bi-prismatique)................................. 1 modèle.

PYRAMIDE ET PYRAMIDE. Cas où les deux corps ont deux plans rasants communs : *pénétration* suivant deux lignes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (toit d'arête bi-pyramidal)......................... 1 modèle.

PRISME ET POLYÈDRE QUELCONQUE. *Pénétration* du polyèdre par le prisme suivant deux lignes distinctes....... 1 modèle.

Il serait facile de multiplier ces combinaisons en établissant certaines conditions de parallélisme entre les arêtes et les faces des corps; mais comme ces résultats ont peu d'intérêt au point de vue géométrique, on a évité de

---

(*) Plan rasant, celui qui passe par une arête sans rencontrer le corps.

les reproduire en relief. Aidés par les modèles qui viennent d'être énumérés, et guidés par l'analogie qui existe entre les prismes et les cylindres, entre les pyramides et les cônes, les élèves pourront traiter graphiquement tous les cas qui ont été laissés de côté.

INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES.

Ces intersections donnent dans l'espace des courbes des deuxième, troisième et quatrième degrés qu'il serait difficile de réaliser autrement.

Sections planes.

Sections planes du solide, compris entre un hyperboloïde de révolution à une nappe et son cône asymptote. 12 modèles.

Toutes les sections coniques, — cercle, ellipse, parabole, hyperbole, droites, — et leurs semblables sur l'hyperboloïde, se trouvent réunies dans ces douze modèles. Il est d'ailleurs facile de les varier à volonté, en plongeant plus ou moins le solide conico-hyperboloïdal dans un liquide légèrement coloré, afin de mieux faire ressortir les courbes de niveau qui sont des coniques.

Cônes et cylindres du second degré.

CÔNE ET CÔNE. *Pénétration* suivant des courbes d'entrée et de sortie distinctes : les deux *corps réunis;* — séparément, le *cône pénétré* et le *cône pénétrant;* — le *solide commun* aux deux corps; — la *coupe verticale* du cône pénétré. 5 modèles.

— Cas où les deux corps ont deux plans tangents communs : *pénétration réciproque* suivant deux courbes planes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (voûte d'arête bi-conique); *coupe* suivant une des ellipses d'intersection.................................. 2 modèles.

— Cas où les surfaces ont des génératrices parallèles : *arrachement indéfini* suivant une courbe hyperbolique. 1 modèle.

— Cas où les surfaces se rencontrent suivant une génératrice et une courbe du troisième degré. . . . . 1 modèle.

Cylindre et Cylindre. *Pénétration* suivant deux courbes distinctes. . . . . 1 modèle.

— *Arrachement réciproque* d'un cylindre elliptique et d'un cylindre de révolution suivant une courbe fermée : les deux *corps réunis ;* — séparément : 1° le *cylindre elliptique arraché* et le *cylindre de révolution arrachant;* 2° le *cylindre de révolution arraché* et le *cylindre elliptique arrachant;* — le *solide commun*. . . . . 5 modèles.

— Cas où les deux corps ont deux plans tangents communs : *pénétration réciproque* suivant deux courbes planes qui se croisent en deux points; — les deux *corps réunis* (voûte d'arête bi-cylindrique); fragment en coin de l'un des cylindres. . . . . 2 modèles.

Cône et Cylindre. Cas où les deux corps ont un plan tangent commun : les deux *corps réunis* (voûte d'arête cylindro-conique). . . . . 1 modèle.

— *Arrachement* suivant une courbe fermée. . . . . 1 modèle.

— Cas où les surfaces ont des génératrices parallèles : *arrachement indéfini* suivant une courbe parabolique. . 1 modèle.

— Cas d'un cône à deux nappes ayant son sommet dans l'intérieur du cylindre : *pénétration* suivant deux courbes distinctes; — les deux *corps réunis;* — séparément, le *cylindre pénétré* et les deux *solides communs*, le *cône pénétrant*. . . . . 4 modèles.

— Cas d'un *cône creux à parois épaisses*, traversé par un *cylindre de révolution*. . . . . 1 modèle.

Cette série, sans renfermer toutes les combinaisons qu'on peut se proposer sur les surfaces coniques et les surfaces cylindriques, présente les plus importantes et les plus usuelles, qui suffisent en même temps pour donner une idée complète de la question générale.

CORPS DE RÉVOLUTION.

SPHÈRE ET CYLINDRE. *Pénétration* suivant deux courbes distinctes; — *pénétration* ou *arrachement* suivant une courbe à nœud; — *arrachement* suivant une courbe fermée. 3 modèles.
SPHÈRE ET CÔNE. Les mêmes cas que les précédents. 3 modèles.
ELLIPSOÏDE ALLONGÉ ET ELLIPSOÏDE APLATI. Les mêmes cas que les précédents.......................... 3 modèles.

Total des modèles............... 60 (*).

Cette collection a un complément nécessaire, dont l'énumération détaillée ne saurait trouver place ici. En voici un simple aperçu :

Polyèdres symétriques; polyèdres réguliers, simples et étoilés; intersection de deux polyèdres quelconques; prismes ou pyramides de même base et de même hauteur; etc.; — voûtes d'arêtes diverses; — maison avec lucarnes et cheminées (sujet de lever, d'ombre et de perspective); — corps de révolution : cônes, cylindres, sphères, ellipsoïdes, paraboloïdes, hyperboloïdes; puits, bornes, niches (cylindrique, conique, cylindro-sphérique), consoles (cylindrique, conique), balustres, tores (à jour, à un ou à deux ombilics), toupie, poulie, etc.

Surfaces générales du second degré : ellipsoïde avec ses sections principales, ses sections circulaires, un système de sections elliptiques quelconques, mais équidistantes, ses lignes de courbure; — Hyperboloïdes et paraboloïde avec leurs sections principales et leurs sections circulaires, et l'hyperboloïde à une nappe avec ses génératrices rectilignes de l'une et l'autre génération; — Paraboloïde hyperbolique (Plan gauche), avec ses sections principa-

(*) Le prix de cette collection est de cent francs. S'adresser franco à M. Bardin, 23, rue du Cherche-Midi, à Paris.

les, un système de sections équidistantes et perpendiculaires à l'axe, un système de sections équidistantes et parallèles à l'une des sections principales, ses génératrices rectilignes de l'une et l'autre génération; — Cônes et cylindres.

Formes héliçoïdales : héliçoïde gauche (plusieurs combinaisons); roues à palettes héliçoïdales; vis à filet triangulaire, à filet carré, à filet trapézoïdal, et leurs écrous; limons d'escalier; variétés de serpentins; colonnes torses, etc. — Anneaux tors, simplement ou doublement tors (profil carré, profil composé); — Divers cas d'intersections de deux surfaces; — Intersections de trois surfaces (trois cônes, trois cylindres); cas de trois sphères égales, ayant leurs centres aux sommets d'un triangle équilatéral (leur solide commun), etc.

Exercices de stéréotomie : arche biaise ou pont biais, représenté dans son ensemble à l'échelle du centième, et dans ses détails à l'échelle du vingtième; escaliers; etc.

Surfaces représentant des lois physiques et des lois mathématiques à trois variables; — Construction en relief de l'équation des cordes vibrantes par Monge, de la surface de l'onde lumineuse de Fresnel, de la formule représentant la surface dans laquelle se transforme par la torsion la section droite d'un prisme élastique (à base carrée, rectangulaire, elliptique), par M. de Saint-Venant, etc.

Collection très-variée de *Reliefs topographiques;* études de rochers à grande échelle, etc.

Note du Rédacteur. Les coquilles héliçoïdales de plusieurs mollusques gastéropodes sont susceptibles d'une certaine construction dont nous parlerons prochainement. Les données géométriques fournissent même de nouveaux caractères génériques qu'on doit à mon neveu Terquem, conchyliologiste, qui habite Metz.

SOLUTION DE LA QUESTION 274

(voir p. 259);

PAR M. JOSEPH SACCHI,
Professeur à Pavie.

1. Soient

$$A_r x + B_r y + C_r z = D_r$$

le $r^{ième}$ plan donné, et

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \omega$$

le plan mobile P, les coordonnées sont rectangles; la condition $\sum_1^n a_r \cos \alpha_r = h$ constante deviendra

$$\sum_1^n a_r \frac{\alpha A_r + \beta B_r + \gamma C_r}{R.R_1} = h,$$

ou bien

$$\frac{p\alpha + q\beta + m\gamma}{R} = h,$$

où

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},\quad R_1 = \sqrt{A_r^2 + B_r^2 + C_r^2},$$

$$p = \sum_1^n \frac{a_r A_r}{R_1},\quad q = \sum_1^n \frac{a_r B_r}{R_1},\quad m = \sum_1^n \frac{a_r C_r}{R_1}.$$

Cette équation équivaut à

$$\frac{\alpha \frac{p}{m} + \beta \frac{q}{m} + \gamma}{R\sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \frac{q^2}{m^2} + 1}} = \frac{h}{\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}},$$

ou bien

$$(1)\qquad \sin(P, D) = \frac{h}{\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}},$$

où D représente la droite qui a pour équations

$$x = \frac{p}{m} z, \quad y = \frac{q}{m} z.$$

Donc le plan mobile forme un angle constant avec la droite D, et si dans son mouvement il se maintient toujours à la même distance d'un point fixe, il engendre un cône droit ayant pour axe la parallèle à la droite D passant par le point fixe; variant h, le cône change, mais la position de l'axe est constante. Le minimum et le maximum de la valeur de h, que l'équation (1) donne, sont évidemment zéro et $\sqrt{p^2 + q^2 + m^2}$: dans le premier cas, le cône devient un cylindre ayant le même axe que le cône; et dans le second, il se réduit au même plan mobile perpendiculaire à la droite D. Si les a_r représentaient les aires de figures placées dans les plans donnés, h serait la somme des projections des mêmes aires sur le plan mobile, et les plans tangents du susdit cône seraient les mêmes pour lesquels h est constant, et le plan perpendiculaire à la droite D celui du maximum de la somme des projections (*).

2. Prenant pour origine des coordonnées le point fixe, l'équation du plan mobile distant de b de l'origine sera

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - b\mathrm{R} = 0,$$

et

$$\alpha p + \beta q + \gamma m - h\mathrm{R} = 0$$

sera la condition donnée. Si nous représentons ces équations par $\varphi = 0$, $f = 0$, on a, pour les équations de l'enveloppe,

$$\varphi'_\alpha f'_\beta - f'_\alpha \varphi'_\beta = 0, \quad \varphi'_\gamma f'_\alpha - f'_\gamma \varphi'_\alpha = 0, \quad \varphi'_\beta f'_\gamma - f'_\beta \varphi'_\gamma = 0,$$

ou

$$\varphi'_\alpha = \frac{d\varphi}{d\alpha}, \dots$$

(*) Plan invariable de Laplace. TM.

Effectuant les calculs et posant

$$qx - py = \mathrm{E}, \quad mx - pz = \mathrm{F}, \quad my - qz = \mathrm{G},$$
$$bp - hx = e, \quad bq - hy = f, \quad bm - hz = q,$$

on a

$$\mathrm{RE} = \alpha f - \beta e, \quad \mathrm{RF} = \gamma e - \alpha g, \quad \mathrm{RG} = \beta g - \gamma f,$$

lesquelles, carrées et sommées, donnent l'équation du cône

$$\mathrm{E}^2 + \mathrm{F}^2 + \mathrm{G}^2 = e^2 + f^2 + g^2,$$

ou bien

$$(px + qy + mz - hb)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - b^2)(p^2 + q^2 + m^2 - h^2),$$

laquelle confirme justement tout ce qu'on a dit ci-dessus. Le cas de $b = 0$ correspond à la question comme elle a été proposée par M. Steiner.

Note du Rédacteur. Ce problème se ramène à la théorie des couples en statique, et *vice versâ.*

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

LEÇONS NOUVELLES D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, A L'USAGE DES ASPIRANTS AUX BACCALAURÉATS ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT; par *M. A. Amiot*, professeur au lycée Saint-Louis. 1853; in-8° de 220 pages.

Ouvrage *conformiste;* toutefois, on y retrouve les qualités de l'auteur d'un de nos meilleurs Traités de Géométrie. Tout est réduit en théorème; ce qui facilite l'étude et aide la mémoire. Les exercices et les exemples sont très-bien choisis; à la page 75, on a laissé par inadvertance une réciproque fausse d'un théorème de Fermat. La théorie des quantités négatives ne me semble pas satisfaisante. Le savant professeur indique des sources historiques; heureuse innovation !

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE
(TOME XII).

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie et Arithmétique.

Déterminants.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique.

Géométrie de l'espace; lignes et surfaces.

Coniques planes.

Surfaces du second degré.

Géométrie des lignes planes.

Mécanique.

Calcul infinitésimal; séries.

Physique mathématique; Astronomie.

Questions proposées.

Questions résolues.

Bibliographie et Biographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

(*) Ancienne dénomination changée en celle de *maître répétiteur*. Un décret du 17 août 1853 (*Moniteur* du 27 août 1853) a relevé la condition et amélioré l'avenir de ces utiles et indispensables fonctionnaires; avenir qui peut devenir brillant. N'oublions pas que sir Isaac Newton a été admis le 5 juin 1661, à l'âge de 19 ans, au collége de la Trinité, de l'Université de Cambridge, à titre gratuit, comme écolier *sous-servant* (subsizar), astreint à des besognes *domestiques*, et ce sous-servant est devenu la lumière du monde. Le décret cité et l'arrêté du 4 septembre (*Moniteur* du 4 septembre 1853), sur le régime alimentaire des lycées, sont des mesures sagement libérales, qui assurent à l'administration du Ministre un long et honorable souvenir.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

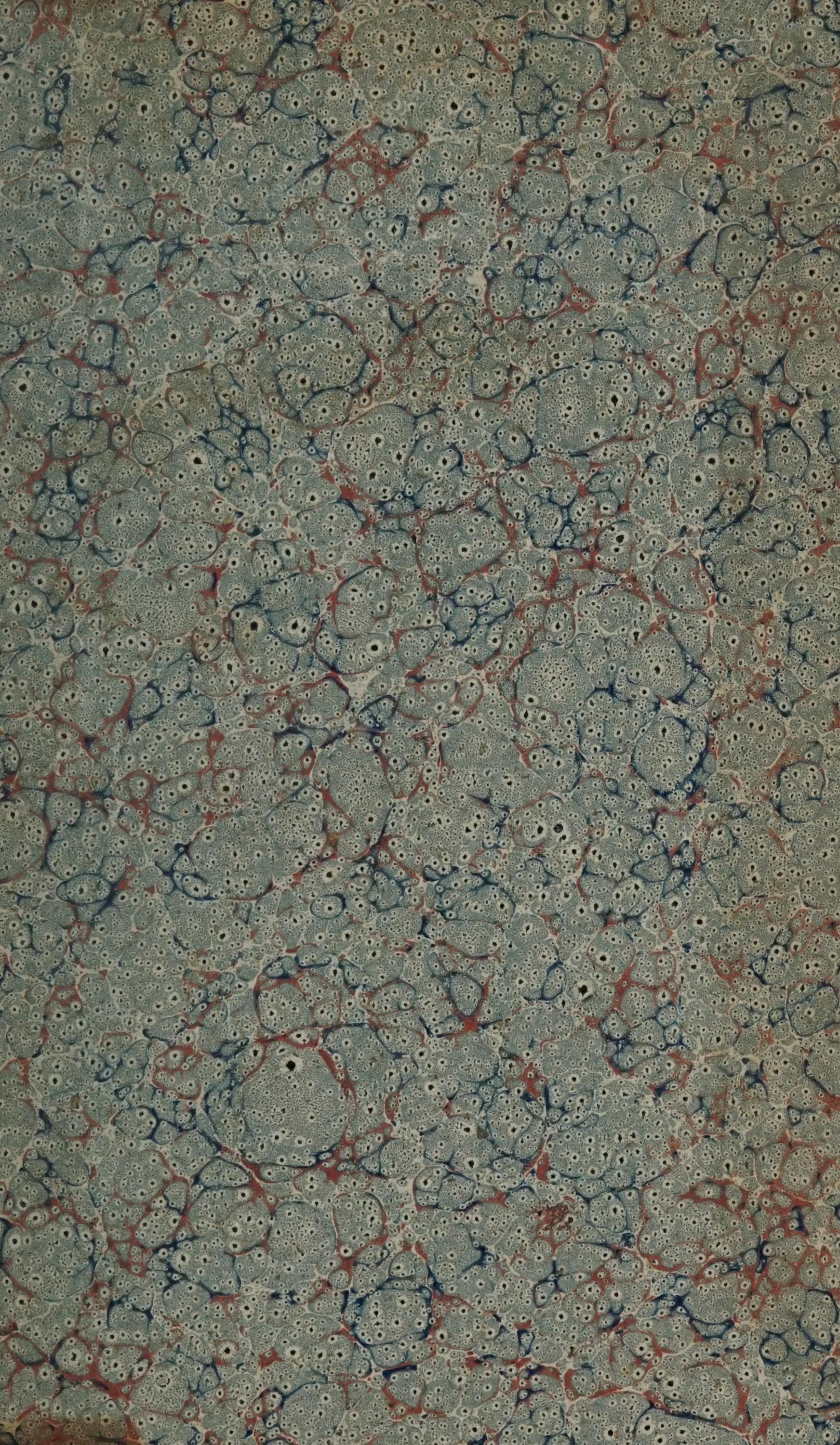
Dans les douze premiers volumes.

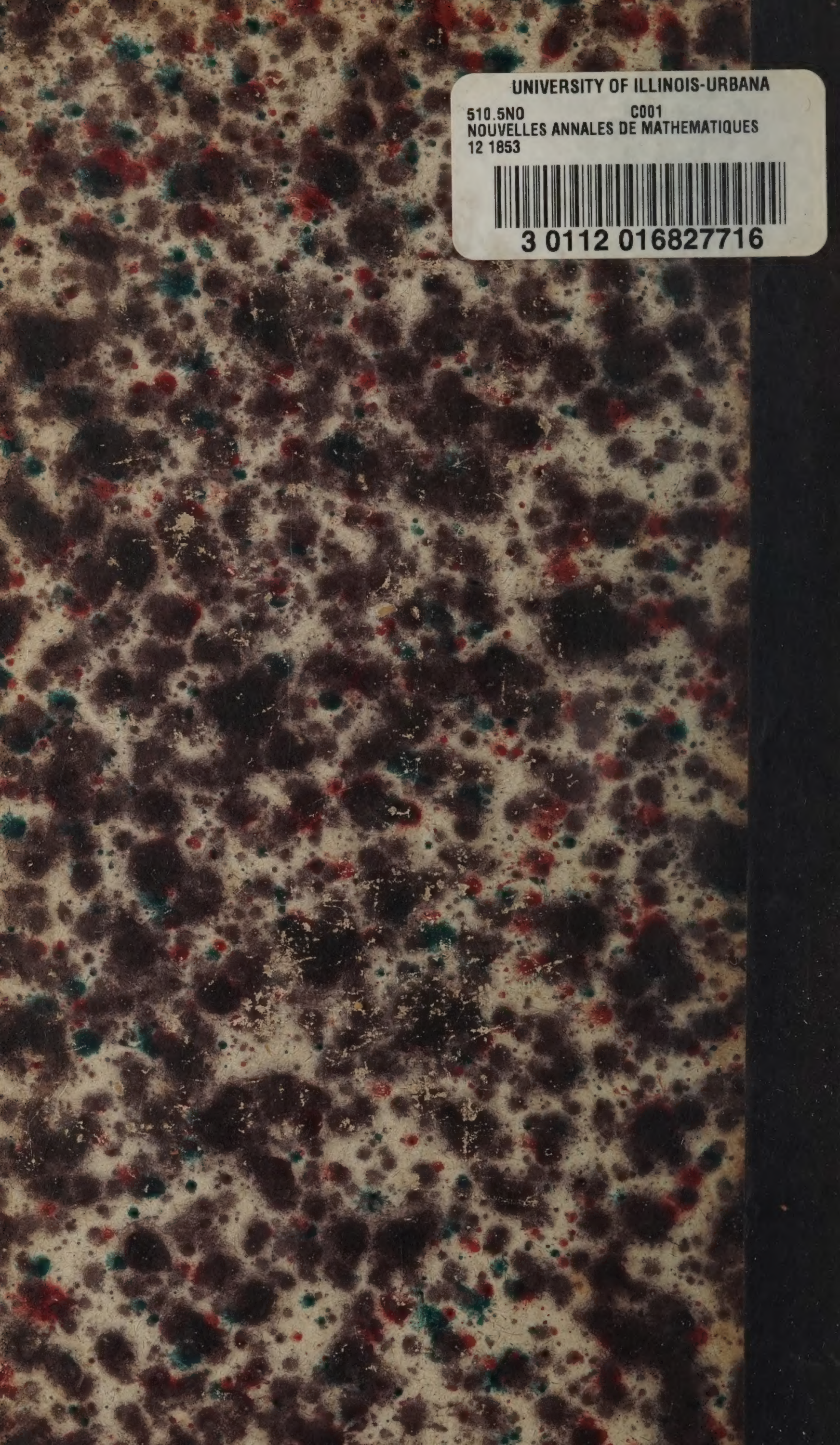
Nos.	Pages.
TOME I.	
41	396 et 447
TOME II.	
61	48
79	454
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VI.	
141	134
TOME VII.	
180	157
190	240
192	368
193	*Ibid.*
TOME VIII.	
199	44
205	107
TOME IX.	
218	11
TOME X.	
240	357
245	358
TOME XI.	
251 échec)	115
252 (domino)	*Ibid.*
256	314
266	401
TOME XII.	
270	99
272	100
280	327
281	*Ibid.*
282	443
283	*Ibid.*
284	*Ibid.*
285	444
286	*Ibid.*

Observation. Sur 286 questions, il en reste 28 à résoudre. Les autres sont résolues et imprimées, ou bien en manuscrit, et paraîtront en 1854.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5NO C001
NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES
12 1853
3 0112 016827716